Introducción a la matemática empresarial

Leonidas Cerda Romero
Janneth Morocho Yaucán

ESPOCH
2018

INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA EMPRESARIAL

INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA EMPRESARIAL

Leonidas Cerda Romero
Janneth Morocho Yaucán

DIRECCIÓN DE PUBLICACIONES

ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO
Fundada en 1972
Riobamba - Ecuador

INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA EMPRESARIAL

Panamericana Sur, kilómetro 1 $^1/_2$
Dirección de Publicaciones Científicas
Riobamba, Ecuador
Teléfono: (593 3) 299 8200
Código Postal: EC060155

Aval ESPOCH

Este libro se sometió a arbitraje bajo el sistema de doble ciego (*peer review*).

Corrección y diseño:
La Caracola Editores

Impreso en Ecuador

CDU: 517 + 519.86 + 658
Riobamba: Escuela Superior Politécnica de Chimborazo
Dirección de Publicaciones, año 2018
164 pp. vol: 17 x 24 cm
ISBN: 978-9942-35-641-3
1. Análisis matemático
2. Matemáticas financieras
3. Administración de empresas
4. Matemática empresarial

Contenido General

Índice de figuras

Prólogo

El presente texto ha sido elaborado pensando en entregar material de apoyo para un curso de matemática de primer semestre en carreras de administración y economía. En éste se abordan las aplicaciones típicas de la teoría de funciones, la teoría de límites y el cálculo diferencial.

El texto ha sido diseñado de tal forma que los lectores tengan primero una panorámica general de los temas tratados. Se ha dejado a un lado la demostración de los resultados matemáticos a favor de una comprensión más adecuada de las aplicaciones administrativas y económicas de la matemática básica. Se han realizado ejemplos detallados para un entendimiento adecuado de los procesos que están involucrados en la resolución de cada tipo de ejercicio.

La obra ha sido desarrollada en tres capítulos, cada uno de los cuales comienza con una visión general de los temas tratados en el transcurso de éste. En el capítulo 1 se estudia la teoría de funciones y sus aplicaciones en el ámbito administrativo. El capítulo 2 estudia la teoría de límites de funciones reales, el objetico de este capítulo es dar el sustento necesario al cálculo diferencial. El capítulo 3 está dedicado al estudio del cálculo diferencial y sus aplicaciones a la administración y economía.

Se piensa tratar temas referentes al cálculo integral y a las ecuaciones diferenciales ordinarias en un segundo tomo.

Leonidas Cerda – Janneth Morocho

Cápitulo 1

Funciones

Con frecuencia, es útil describir una cantidad en términos de otra. Por ejemplo, el crecimiento de una planta está relacionado con la cantidad de luz que recibe, la demanda para cierto producto está relacionada con el precio del producto, el costo de un viaje está relacionado con la distancia recorrida, etc. En el siglo XVII, Gottfried Wilhelm Leibniz, uno de los inventores del cálculo, introdujo el término de función en el vocabulario matemático. El concepto de función es uno de los más básicos en toda la matemática y es esencial para el estudio del cálculo.

1.1 Introducción

En forma breve, una función es un tipo especial de relación que expresa como una cantidad (la salida) depende de otra cantidad (la entrada). Por ejemplo, cuando se invierte dinero a alguna tasa de interés, el interés I (salida) depende del tiempo t (entrada) que el dinero esté invertido. Para expresar esta dependencia, decimos que I es una "función de" t. Las relaciones funcionales como ésta en general se expresan mediante una fórmula que muestra lo que debe hacerse con la entrada para determinar la salida.

Para ejemplificar, supóngase que \$100 ganan un interés simple a una tasa anual del 6%. Luego, puede mostrarse que el interés y el tiempo están relacionados por la fórmula $I = 100(0.06)t$, donde I está en dólares y t en años. Por ejemplo, si $t = \frac{1}{2}$, entonces el interés se calcula reemplazando el valor de t (la entrada) en la fórmula para I (la salida), es decir

$$I = 100(0.06)\left(\frac{1}{2}\right) = 3.$$

Así, la fórmula para el interés asigna la entrada $\frac{1}{2}$ a la salida 3. Podemos pensar que la fórmula para el interés es una regla: multiplicar t por $100(0.06)$, la regla asigna a cada número de entrada t la salida I, el cual se simboliza mediante la siguiente notación $t \rightarrow I$ o $t \rightarrow 100(0.06)t$. Esta regla es un ejemplo de una función en el sentido de la siguiente definición:

Definición. *Una función en una regla que asigna a cada número de entrada exactamente un número de salida. Al conjunto de los números de entrada, para los cuales se aplica la regla, se le llama dominio de la función. El conjunto de todos los números de salida se llama el rango o recorrido.*

Para la función del interés definida anteriormente, el número de entrada no puede ser negativo, ya que el tiempo negativo no tiene sentido. Así el dominio consiste en todos los números no negativos; es decir, en todos los números t tales que $t \geq 0$. Además podemos observar que cuando la entrada es $\frac{1}{2}$, la salida es 3. De modo que 3 está en el rango.

Hasta aquí hemos usado el término función en un sentido restringido, ya que en general, las entradas y salidas no tienen por qué ser números. Por ejemplo, una lista de países y capitales asigna a cada país su capital (exactamente una salida), de modo que hay una función implicada. Por el momento consideraremos solo funciones cuyos dominios y rangos consistan en números.

Una variable que represente a los números de entrada para una función se llama variable independiente. Una variable que represente a los números de salida se denomina variable dependiente, ya que su valor depende del valor de la variable independiente. Decimos que la variable dependiente es una función (o que está en función) de la variable independiente. Es decir, la salida es una función de la entrada. Así, para la fórmula de interés $I = 100(0.06)t$, la variable independiente es t y la variable dependiente es I, luego I es función de t.

La ecuación (o fórmula) $y = x + 2$ define a y como una función de x. La ecuación da la regla: "sumar 2 a x". Esta regla asigna a cada entrada x exactamente una salida $y = x + 2$. De esta forma tenemos que si $x = 1$, entonces $y = 3$ y si $x = -4$, entonces $y = -2$. La variable independiente es x y la variable dependiente es y.

Nota. *No todas las ecuaciones en x y y definen a y como función de x. Por ejemplo, sea $y^2 = x$. Si x es 9, entonces $y^2 = 9$, de modo que $y = \pm 3$. Por lo tanto, para la entrada 9 se asigna no uno sino dos números de salida, 3 y -3. Esto viola la definición de función, de modo que y no es función de x.*

Para designar una función se utilizan, en general, las letras f, g, h, F, G, etc.

La ecuación $y = x + 2$, define a y como función de x. Supongamos que f representa la regla "sumar 2 a x". Así, f es la función. Para indicar que f asigna la entrada 1 a la salida 3, escribimos $f(1) = 3$, que se lee "f de 1 es igual a 3". En forma análoga tenemos que $f(-4) = -2$. En forma general, si x es cualquier entrada utilizamos la notación $f(x)$, que se lee "f de x".

Nota. *Se dice que $f(x)$ define la función f. Además, $f(x)$ representa el número de salida en el rango de f que corresponde al número de entrada x en el dominio.*

Consideremos nuevamente la ecuación $y = x + 2$. El resultado de $f(x)$ es y pero como $y = x + 2$, podemos escribir

$$f(x) = x + 2.$$

De esta forma, para encontrar $f(3)$, que es la salida correspondiente a la entrada 3, reemplazamos con 3 cada x en la expresión $f(x) = x + 2$, así $f(3) = 3 + 2 = 5$. Del mismo modo:

$$f(8) = 8 + 2 = 10$$
$$f(-4) = -4 + 2 = -2$$
$$f(a) = a + 2$$
$$f(x + 1) = (x + 1) + 2 = x + 1 + 2 = x + 3$$

Nota. *$f(x)$ no significa f veces x, $f(x)$ es la salida correspondiente a la entrada x.*

1.2 Funciones elementales y sus gráficos

La gráfica de una función definida por $f(x)$ se define como la gráfica de la ecuación $y = f(x)$. Por ejemplo, la gráfica de la función definida por

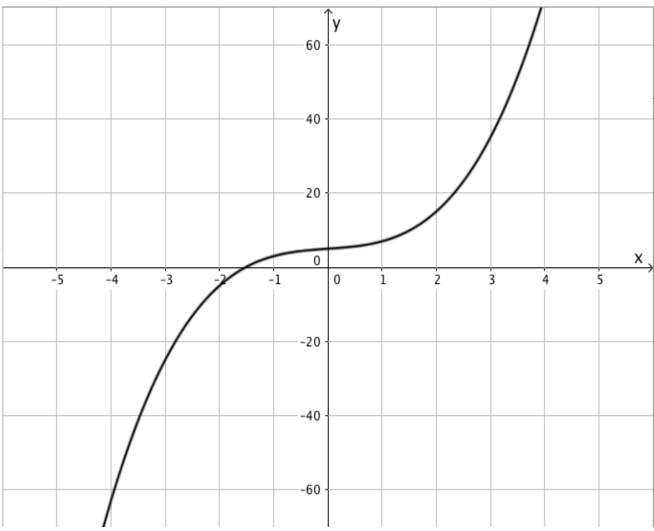
$$f(x) = x^3 + x + 5$$

es la gráfica de la ecuación $y = x^3 + x + 5$. Así, la gráfica de una función consiste en todos los puntos en el plano coordenado cuyas coordenadas son de la forma $(x, x^3 + x + 5)$, es decir, todos los puntos $\big(x, f(x)\big)$. Lo mismo es cierto en el caso general: cada punto sobre la gráfica de una función f es un par ordenado cuya primera componente es el número de entrada del dominio de f y cuya segunda coordenada es el correspondiente número de salida.

Nota. *En este nivel, para trazar la gráfica de una función f se puede dar valores a la variable independiente x y calcular el valor de la variable dependiente $y = f(x)$. Por ejemplo, para la función definida por*

$$f(x) = x^3 + x + 5$$

se tiene la siguiente tabla de valores con su correspondiente gráfico:



x	y
-2	-5
-1	3
0	5
1	7
2	15

Figura 0.1. Gráfico de la función $\boldsymbol{f(x) = x^3 + x + 5}$.

En la siguiente subsección se enuncia un grupo de funciones elementales con su respectivo gráfico.

1.2.1 Función lineal

La función lineal tiene la forma $f(x) = mx + b$, su gráfico es una recta tal que:

- m es la pendiente de la recta y nos indica el grado de inclinación de la misma, mientras mayor sea más inclinada será la recta, si es positiva tiene una inclinación hacia la derecha mientras si es negativa tiene una inclinación hacia la izquierda.

- b es la intersección vertical o valor de y cuando x es cero.

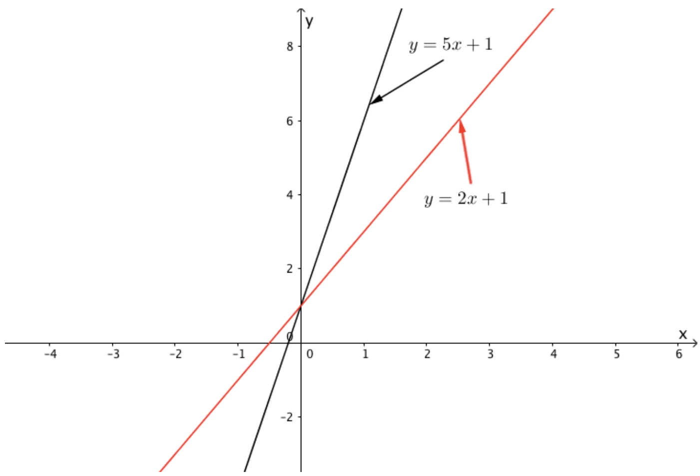


Figura 0.2. Gráfica de la función lineal.

El gráfico 1.2 muestran dos rectas una de pendiente 2 (menos inclinada) y otra de pendiente 5 (más inclinada), en ambos casos el valor de b es 1 (la intersección vertical o el valor de y cuando x es cero), la inclinación de las rectas es hacia la derecha pues su pendiente es positiva.

Not. *La pendiente de una recta se puede calcular cuando se conoce dos puntos por donde pasa la recta, por ejemplo, si* (x_1, y_1) *y* (x_2, y_2) *son dos puntos tales que* $x_1 \neq x_2$*, entonces,* $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

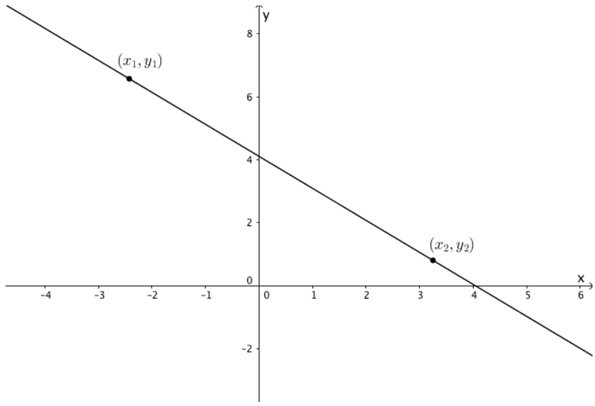
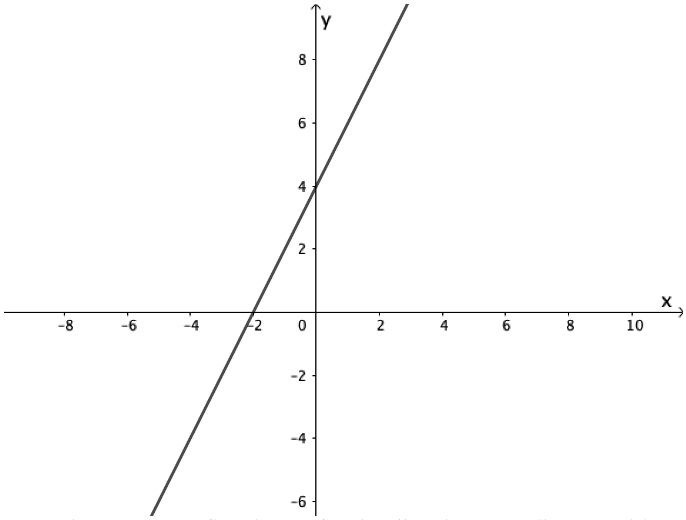


Figura 0.3. Gráficpo de la función lineal con pendiente negativa.

La Figura 1.3 muestra una recta cuya pendiente es negativa y por tanto tiene una inclinación hacia la izquierda.

Nota. *Para graficar una función lineal (una recta) es suficiente dar dos valores a la variable independiente* x *y calcular sus valores corespondientes* $f(x)$.

Por ejemplo, si quisiéramos graficar la función $f(x) = 2x + 4$ utilizaríamos la tabla que se muestra a continuación:



x	y
0	4
2	8

Figura 0.4. Gráfico de una función lineal con pendiente positiva.

Sea f una función lineal definida por $f(x) = mx + b$. Si pedimos que $f(x) = 0$, entonces obtenemos una expresión de la forma $mx + b = 0$, llamada ecuación lineal en la variable o incognita x. La solución de una ecuación lineal en la variable x, es decir el valor real x_0 tal que $mx_0 + b = 0$, representa el punto de intersección de la gráfica de la función lineal $f(x) = y$ con el eje x.

El siguiente teorema nos dice como hallar la solución de una ecuación lineal en la variable x.

Teorema. *La solución de la ecuación lineal* $mx + b = 0$ *tiene la forma*

$$x = -\frac{b}{m}.$$

Para ver que el Teorema 1.1 se satisface es suficiente reemplazar x por el valor $-\frac{b}{m}$ en la ecuación lineal y comprobar que efectivamente se cumple la igualdad (hacerlo).

1.2.2 Función exponencial

Sea a una constante positiva diferente de 1. La función definida por $f(x) = a^x$ se llama función exponencial con base a. El gráfico de una función exponencial tiene la forma:

En general lo único que se sabe de la función exponencial es que cuando su base a es mayor que uno tendrá una apariencia como la curva que asciende de izquierda a derecha y cuando $0 < a < 1$ tendrá una apariencia como la curva que desciende de izquierda a derecha. Para un trazo más adecuado de la función exponencial se realiza una tabla de valores para las variables x y y.

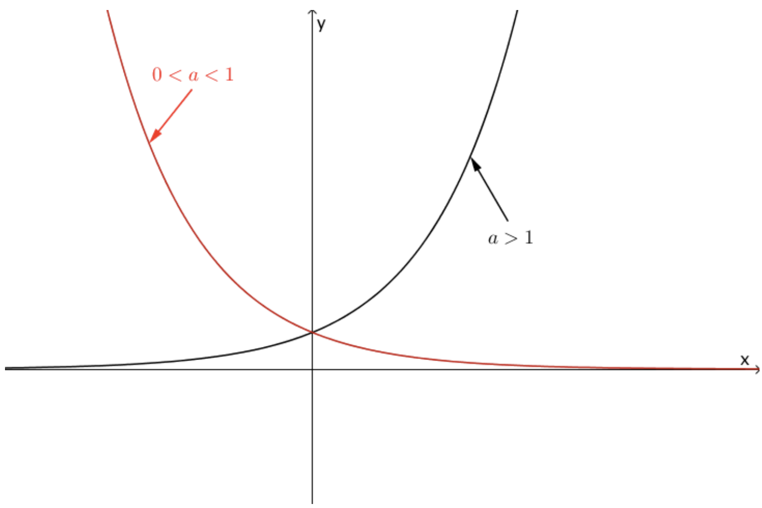


Figura 0.5. Gráfico de la función exponencial.

Las figuras 1.6 y 1.7 muestran el trazo de dos funciones exponenciales con su respectiva tabla de valores.

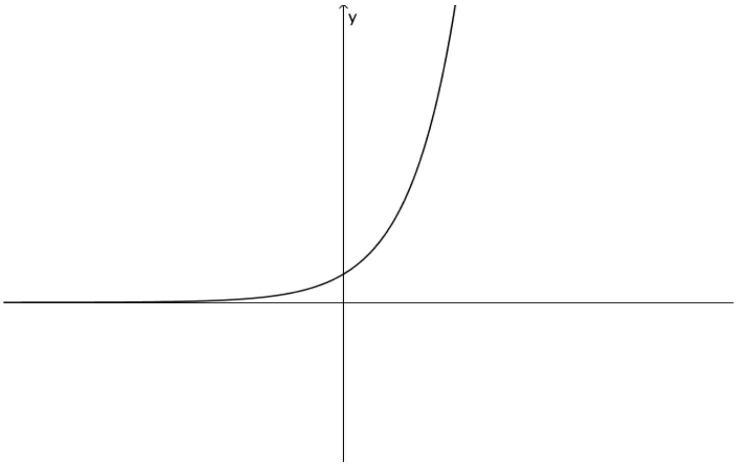


Figura 0.6. Gráfico de $\boldsymbol{f(x) = 3^x}$.

x	y
-1	0.33
-0.5	0.57
0	1
0.5	1.73
1	3

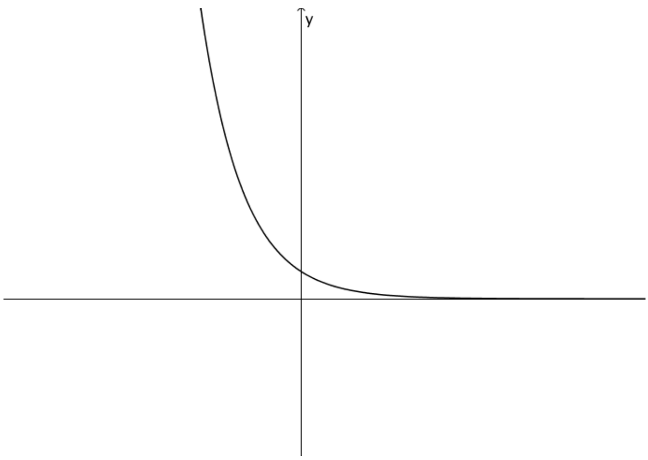


Figura 0.7. Gráfico de $\boldsymbol{f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x}$.

x	y
-1	3
-0.5	1.73
0	1
0.5	0.57
1	0.33

Nota. *Puesto que a es un número real positivo diferente de 1 se tiene que siempre se puede realizar el cálculo de a^x, por tanto el dominio de la función* *exponencial es el conjunto de los números reales. Además, el recorrido de la función esponencial es el conjunto de los reales positivos.*

La definición de la función exponencial nos sugiere que si $a^x = a^y$ entonces $x = y$. De este hecho podemos decir que una igualdad (ecuación para ser más exactos) en la que aparezca una variable como exponente se llama ecuación exponencial, por ejemplo, la ecuación $9^x = 27$ es un ejemplo de ecuación exponencial. Resolver una ecuación exponencial significa hallar el valor de la variable (incógnita x) que satisfaga la ecuación. En el ejemplo anterior se tiene que:

$$9^x = 27$$
$$(3^2)^x = 3^3$$
$$3^{2x} = 3^3$$
$$2x = 3$$
$$x = \frac{3}{2}$$

Desde el ejemplo anterior podemos observar que para resolver una ecuación exponencial se trata de escribir una igualdacen entre potencia de la misma base.

Ejemplo. Resolver la ecuación $(2^{x+1})^2 = 64$.

Solución. Se tiene que, aplicando la propiedad $(a^n)^m = a^{nm}$, $(2^{x+1})^2 = 2^{2x+2}$ y puesto que $64 = 2^6$ tenemos que la ecuación la podemos escribir como $2^{2x+2} = 2^6$. Luego $2x + 2 = 6$, resolviendo esta ecuación lineal en la variable x tenemos que la solución de la ecuación exponencial es $x = 2$.

Ejemplo. Resolver la ecuación $4^{2x-5} = 64$.

Solución. Se tiene que $4^{2x-5} = 4^3$, luego $2x - 5 = 3$. Así $x = 4$.

1.2.3 Función logarítmica

Existe una relación entre la función exponencial y lo que se conoce en matemática como función logarítmica. Más exactamente se tiene la siguiente definición:

Definición. *Sea a un número real positivo y diferente de 1. Se llama función logaritmo de base a, denotada por $log_a(x)$, a la función que satisface la siguiente propiedad: $y = log_a(x)$ si y sólo si $a^y = x$.*

El gráfico de la función logaritmo se muestra en la Figura 1.8.

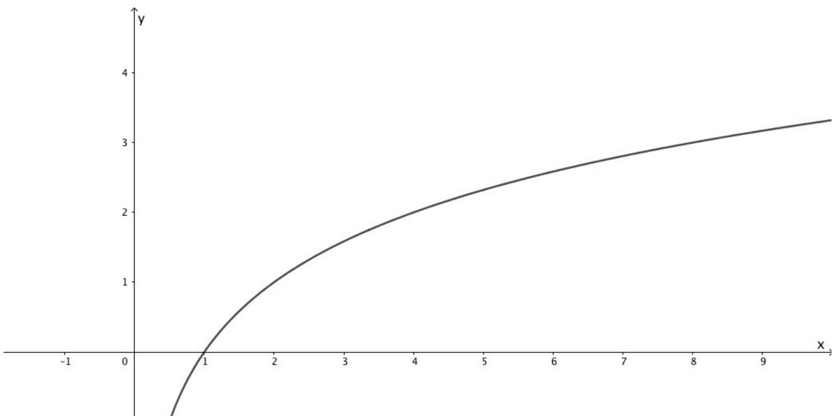


Figura 0.8. Gráfico de la función $\boldsymbol{f(x) = log_a(x)}$.

Desde la definición de función logaritmo de base a se tiene que el dominio de esta función es el conjunto de todos los reales positivos y su recorrido es el conjunto de todos los números reales. Además, $log_a(1) = 0$.

El siguiente teorema muestra algunas propiedades que satisface la función logaritmo.

Teorema. *La función logaritmo satisface las siguientes propiedades:*

a. $log_a(xy) = log_a(x) + log_a(y)$.

b. Si $y \neq 0$, entonces $log_a\left(\frac{x}{y}\right) = log_a(x) - log_a(y)$.

c. $log_a(x^r) = r\ log_a(x)$.

d. $log_a(a) = 1$.

e. $log_a(a^x) = x$.

f. $a^{log_a(x)} = x$.

Para dar una idea de los procesos involucrados en la demostración del Teorema 1.2, presentamos la demostración de los primeros tres literales.

a. Sea $log_a(x) = z_1$ y $log_a(y) = z_2$. Desde la definición de función logaritmo se tiene

$$\begin{cases} a^{z_1} = x, \\ a^{z_2} = y. \end{cases}$$

Luego $a^{z_1}a^{z_2} = xy$, por tanto $a^{z_1+z_2} = xy$. Aplicando la definición de función logatirmo de base a tenemos

$$log_a(xy) = z_1 + z_2 = log_a(x) + log_a(y).$$

b. Sea $log_a(x) = z_1$ y $log_a(y) = z_2$. Desde la definición de función logaritmo se tiene

$$\begin{cases} a^{z_1} = x, \\ a^{z_2} = y. \end{cases}$$

Puesto que $y \neq 0$, tenemos $\frac{a^{z_1}}{a^{z_1}} = \frac{x}{y}$, por tanto $a^{z_1 - z_2} = \frac{x}{y}$. Aplicando la definición de función logatirmo de base a tenemos

$$log_a\left(\frac{x}{y}\right) = z_1 - z_2 = log_a(x) - log_a(y).$$

c. Sea $log_a(x) = z$. Desde la definición de función logaritmo se tiene $a^z = x$. Luego $a^{rz} = x^r$. Aplicando la definición de función logaritmo se tiene $log_a(x^r) = rz = r\ log_a(x)$.

Nota. *En la literatura matemática se pueden hallar dos logaritmos de gran importancia, los logaritmos vulgares y los logaritmos naturales, definiéndose estos como sigue:*

1. Se llama logaritmo vulgar a aquel logaritmo que tiene base 10. Para indicar que la función con la que estamos tratando es un logaritmo vulgar escribimos $f(x) = log(x)$.

2. *Se llama logaritmo natural a aquel logaritmo que tiene base e, donde e* ≈ 2.7182818284. *Para indicar que la función con la que estamos tratando es un logaritmo natural escribimos* $f(x) = ln(x)$.

El siguiente teorema nos enseña como podemos cambiar la base de un logaritmo.

Teorema. *Sean* a, b *dos números reales positivos y distintos de 1. Se cumple que* $log_a(x) = \frac{log_b(x)}{log_b(a)}$.

Demostración. Sea $log_a(x) = y$. Por la definicón de función logaritmo se tiene $a^y = x$. Luego $log_b(a^y) = log_b(x)$, por la propiedad c del Teorema 1.2 se tiene $ylog_b(a) = log_b(x)$, luego

$$y = log_a(x) = \frac{log_b(x)}{log_b(a)}.$$

Como un caso particular del Teorema 1.3 se tiene que $log_a(x) = \frac{ln(x)}{ln(a)}$. Como ejemplo de este resultado se puede calcular el valor de $log_7(3)$. En efecto, se tiene que $log_7(3) = \frac{ln(3)}{ln(7)} \approx \frac{1.0986}{1.9459} \approx 0.5646$.

1.2.4 Función potencia

Se llama función potencia de exponente $n \in \mathbb{N}$ a la función definida como $f(x) = x^n$. La gráfica de esta función depende de cuánto valga el exponente n. Para las potencias 2 y 3 se tiene:

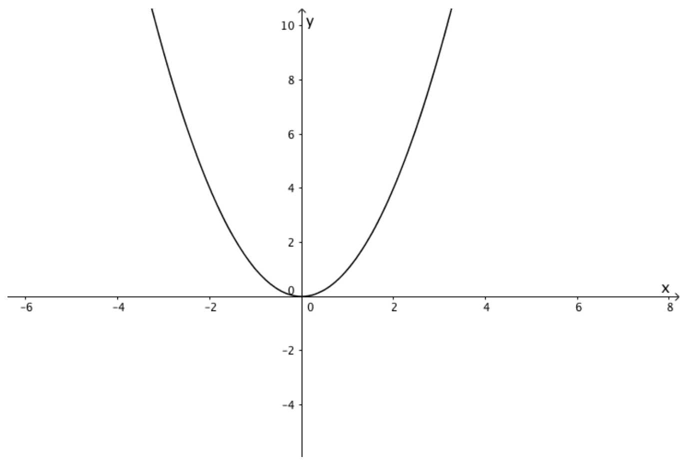


Figura 0.9. Gráfico de $\boldsymbol{f(x) = x^2}$.

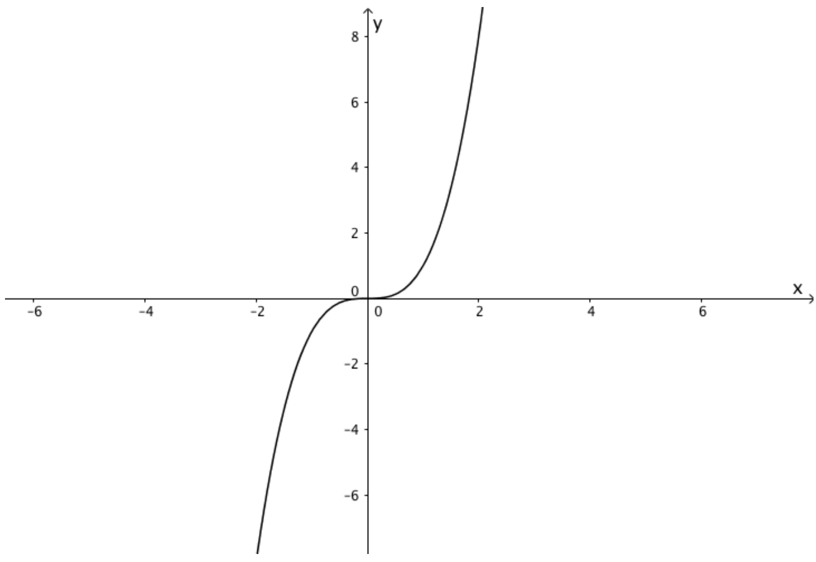


Figura 0.10. Gráfico de $\boldsymbol{f(x) = x^3}$.

Para valores de n mayores que 3 las gráficas de esta función son más o menos parecidas a las anteriores, dependiendo de si el exponente es par o impar, por ejemplo, la gráfica de las funciones definidas por $f(x) = x^4$ y $f(x) = x^5$ se muestran el las figuras 1.11 y 1.12 respectivamente.

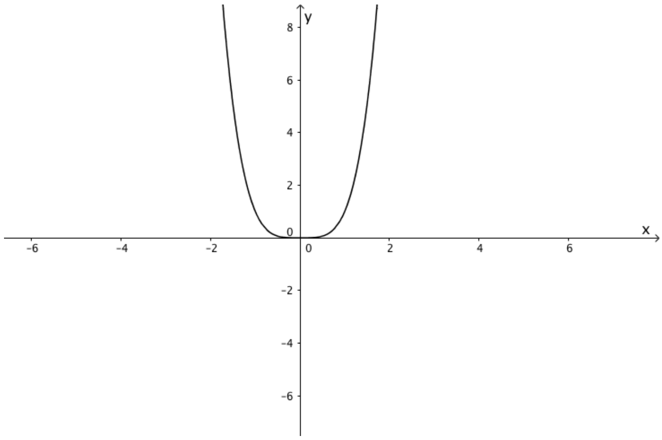


Figura 0.11. Gráfico de $\boldsymbol{f(x) = x^4}$.

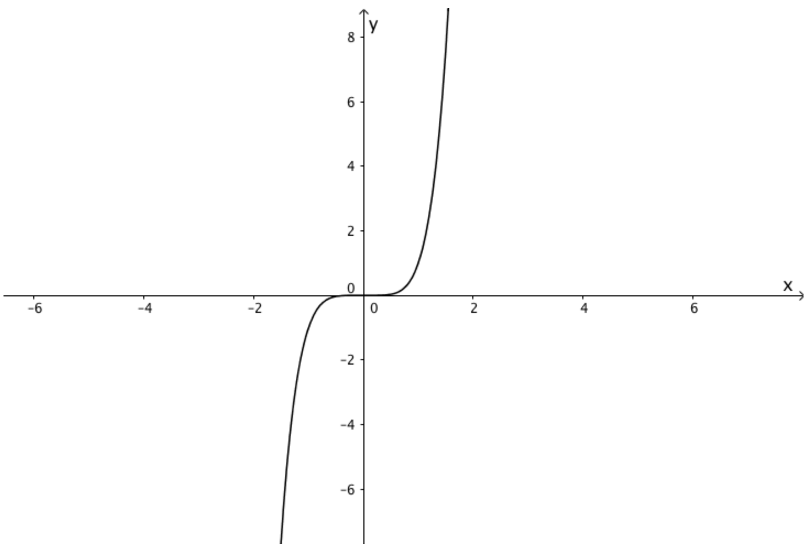


Figura 0.12. Gráfico de $\boldsymbol{f(x) = x^5}$.

Nota. *Un caso importante de esta función resulta de la suposición de que* $x \neq 0$ *y* $n = 0$. *Bajo esta suposición se tiene que* $f(x) = x^0 = 1$.

1.2.5 Funciones seno y coseno

Las funciones senos y coseno, denotadas por "sin" y "cos" respectivamente, son un ejemplos de las llamadas funciones trigonometricas[1].

La función f definida por $f(x) = sin(x)$ es una función con dominio el conjunto de todos los números reales y cuyo recorrido es el intervalo cerrado $[-1,1]$. Su gráfico se muestra en la Figura 1.13.

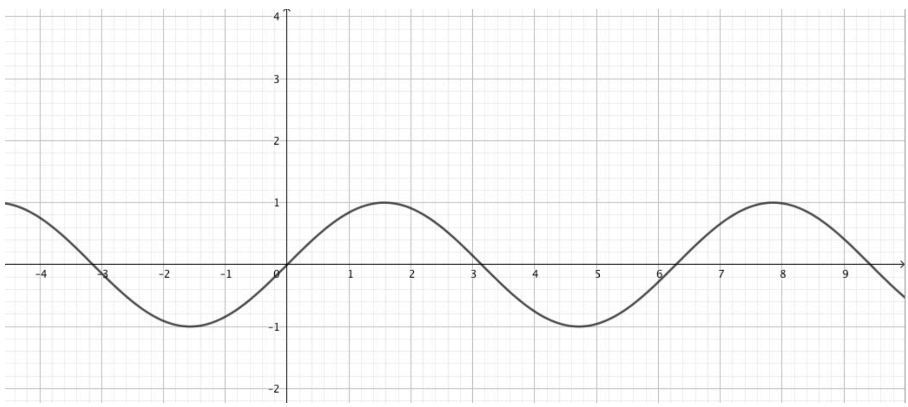


Figura 0.13. Gráfico de la dunción definida por $\boldsymbol{f(x) = sin(x)}$.

Nota. *Los valores de la función* sin *para los argumentos* $0,\ \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi$ *se los puede calcular a partir del círculo trigonométrico (ver Figura 1.15)*[2].

Desde la trigonométria elemental, se tiene que $sin(x)$ coincide con el cateto opuesto al argumento x. Así, los valores de $f(x) = sin(x)$ para x igual a $0,\ \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi$ son:

[1] Las demás funciones trigonométricas se definirán en la sección 1.3 dedicada al algebra de funciones.

[2] El círculo trigonométrico consiste en un círculo de radio la unidad.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$sin(x)$	0	1	0	-1	0

La función f definida por $f(x) = cos(x)$ es una función con dominio el conjunto de todos los números reales y cuyo recorrido es el intervalo cerrado $[-1,1]$. Su gráfico se muestra en la Figura 1.14.

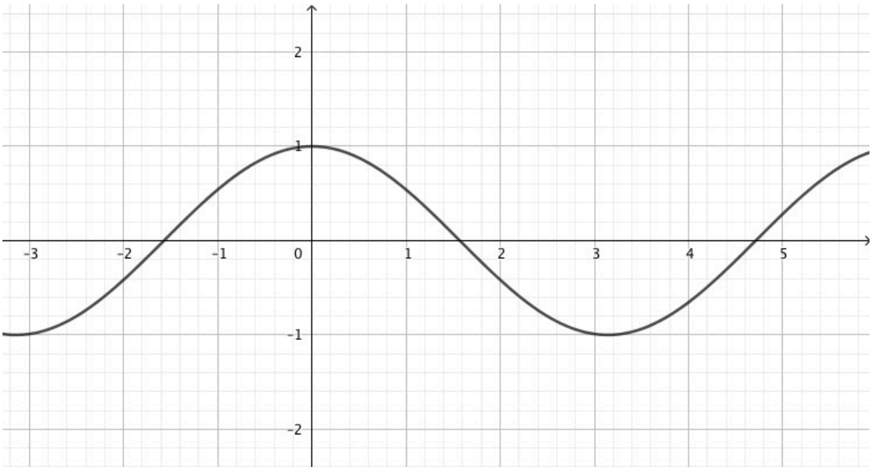


Figura 0.14. Gráfico de la dunción definida por $\boldsymbol{f(x) = cos(x)}$.

Nota. *Los valores de la función* cos *para los argumentos* $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi$ *se los puede calcular a partir del círculo trigonométrico (ver Figura 1.15).*

A partir de la trigonométria elemental, se tiene que $cos(x)$ coincide con el cateto adyacente al argumento x. Así, los valores de $f(x) = cos(x)$ para x igual a $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi$ son:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$cos(x)$	1	0	-1	0	1

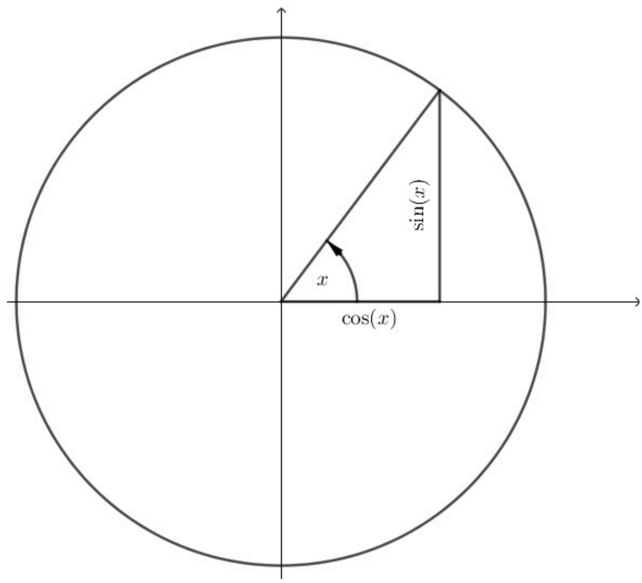


Figura 0.15. Gráfico del círculo trigonométrico.

1.2.6 Función raíz n-ésima

La función raíz n-ésima es una función definida por $f(x) = \sqrt[n]{x}$ donde n es un número entero positivo.

Si n es un número par diferente de cero, entonces el dominio de la función definida por $f(x) = \sqrt[n]{x}$ es el conjunto de todos los números reales $x \geq 0$. Su recorrido es el conjunto de los reales no negativos.

Si n es un número impar, entonces el dominio de la función definida por $f(x) = \sqrt[n]{x}$ es el conjunto de todos los números. Su recorrido es el conjunto de los reales no negativos.

1.2.7 Función conatante

Una función contante en una función definida por $f(x) = k$, donde k es cualquier número real.

El dominio de una función constante es el conjunto de los números reales mientras su recorrido es el conjunto $\{k\}$. El gráfico de una función constante se muestra en la Figura 1.16.

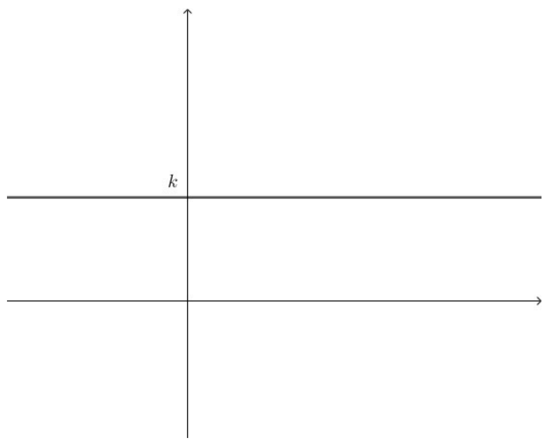


Figura 0.16. Gráfica de la función constante definida por $\boldsymbol{f(x) = k}$.

1.3 Algebra de funciones

Hacer algebra de funciones significa construir nuevas funciones a partir de funciones conocidas (las elementales en nuestro caso) a través de operaciones. Las operaciones más importantes que se pueden definir entre funciones son:

1. Multiplicación de una función por un número
2. Suma de funciones
3. Multiplicación de funciones
4. División de funciones
5. Composición de funciones

De ahora en adelante usaremos la siguiente notación:

a. $Dom\ f$ representará el dominio de una función f.

b. $Rec\ f$ representará el recorrido de una función f.

1.3.1 Multiplicación de una función por un número

Sea f una función y $\lambda \in \mathbb{R}$, se define la multiplicación de f por λ de la siguiente manera:

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

Nótese que para multiplicar λ por f lo único que tenemos que hacer es multiplicar λ por la definición de f.

Ejemplo.

1. Si $\lambda = 4$ y $f(x) = x^2$, entonces

$$(\lambda f)(x) = (4f)(x) = 4f(x) = 4x^2$$

2. Si $\lambda = 2$ y $f(x) = ln(x)$, entonces $(\lambda f)(x) = 4f(x) = 4ln(x)$

3. Si $\lambda = 5$ y $sin(x)$, entonces $(\lambda f)(x) = 5f(x) = 5sin(x)$.

Nota. *Se tiene que* $Dom(\lambda f) = Dom\, f$.

1.3.2 Suma de funciones

Sean f y g dos funciones, la suma de f con g se define de la siguiente manera:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

Nótese que para sumar la función f con la función g lo único que tenemos que hacer es sumar las definiciones de f y g.

El dominio de la función suma $f + g$ es, se podría intuir, el conjunto de todos los valores x donde se puede calcular $f(x)$ y $g(x)$. Luego se tiene $Dom(f + g) = Dom\, f \cap Dom\, g$.

Ejemplo.

1. Si $f(x) = 2x$ y $g(x) = 5x^2$, entonces $(f + g)(x) = 2x + 5x^2$.

2. Si $f(x) = ln(x)$ y $g(x) = 5x^3$, entonces

$$(f + g)(x) = ln(x) + 5x^3.$$

Notas.

1. *La noción de suma de funciones se puede extender sin dificultad a un número finito de funciones de la siguiente manera:*

$$(f_1 + f_2 + \cdots + f_n)(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)$$

2. *La suma de funciones es importante pues nos permite definir la función polinomio de grado n o función polinomial de grado n; esta función está definida de la siguiente manera:*

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n, \qquad a_n \neq 0$$

Ejemplo.

1. $P_1(x) = ax + b$, llamada función lineal, como vimos anteriormente

2. $P_2(x) = ax^2 + bx + c$, llamada función cuadrática, el gráfico de esta función recibe el nombre de parábola y tiene una estructura como la que se muestra a continuación:

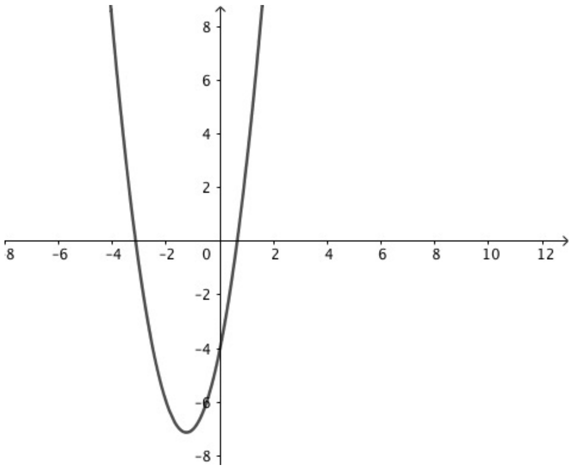


Figura 0.17. Gráfico de la función cuadrática, caso $\boldsymbol{a > 0}$.

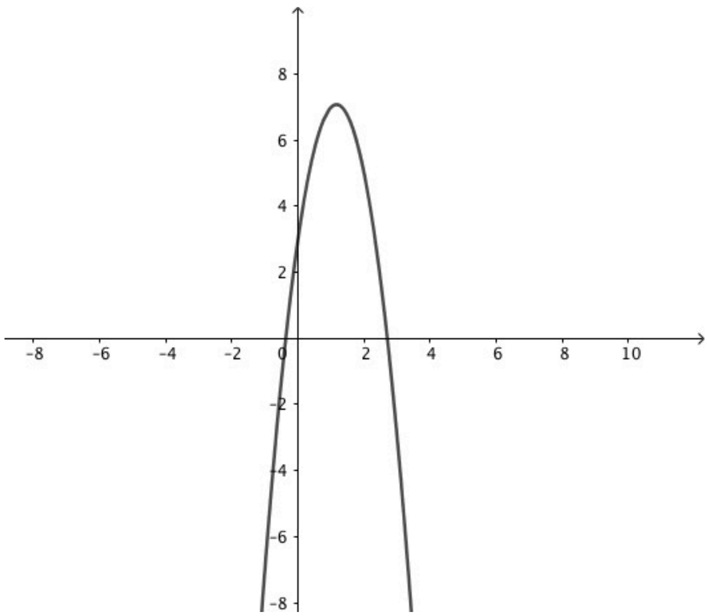


Figura 0.18. Gráfico de la función cuadrática, caso $\boldsymbol{a < 0}$.

El punto más bajo (en el caso de ser $a > 0$) o más alto (en el caso de ser $a < 0$) se llama vértice de la parábola y se lo puede calcular con la siguiente fórmula:

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$$

Nota. *Para terminar de dibujar la parábola se tiene que realizar, como se indicó anteriormente, una tabla de valores.*

3. $P_3(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ llamada función cúbica. Para realizar el gráfico de esta función se tiene que construir una tabla de valores. Por ejemplo, se tiene los siguientes gráficos:

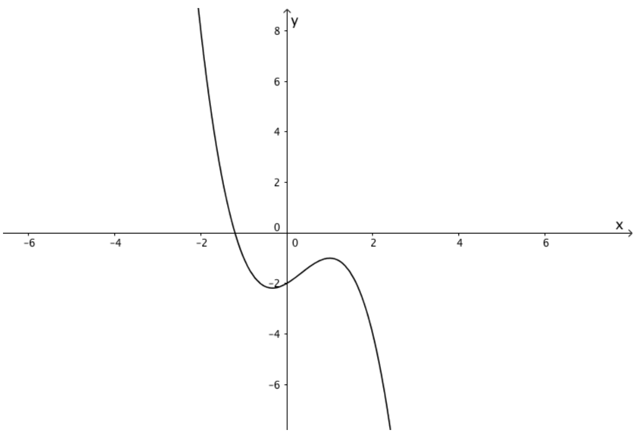


Figura 0.19. Gráfico la función $\boldsymbol{f(x) = -x^3 + x^2 + x - 2}$.

x	y
-2	8
-1	-1
0	-2
1	-1
2	-4

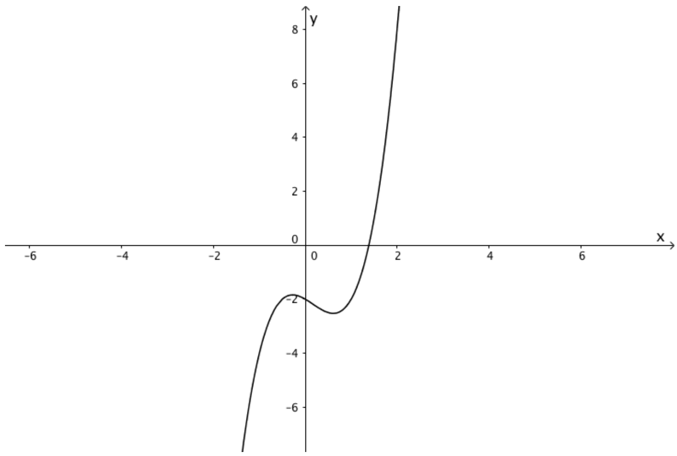


Figura 0.20. Gráfico de la función $\boldsymbol{f(x) = 2x^3 - x^2 - x - 2}$.

x	y
-2	-20
-1	-4
0	-2
1	-2
2	8

Las funciones polinomiales de grado mayor que 3, siendo importantes, aparecen con poca frecuencia en las aplicaciones a la administración y economía.

1.3.3 Multiplicación de funciones

Sean f y g dos funciones, la multiplicación de la función f con la función g se define de la siguiente manera:

$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

Nótese que para multiplicar la función f con la función g lo único que tenemos que hacer es multiplicar las definiciones de f y g.

Ejemplo

1. Si $f(x) = x - 2$ y $g(x) = 2x^2 - x + 1$ entonces:

$$(fg)(x) = (x-2)(2x^2 - x + 1) = 2x^3 - 3x^2 + 2x - 2$$

2. Si $f(x) = 5x^3$ y $g(x) = ln(x)$ entonces: $(fg)(x) = 5x^3 ln(x)$

El dominio de la función multiplicación o producto fg es el conjunto de todos los valores x donde se puede calcular $f(x)$ y $g(x)$. Luego se tiene

$Dom(fg) = Dom\, f \cap\, Dom\, g.$

1.3.4 División de funciones

Sean f y g dos funciones, la división de la función f con la función g se define de la siguiente manera:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \text{donde } g(x) \neq 0.$$

Nótese que para dividir la función f con la función g lo único que tenemos que hacer es dividir las definiciones de f y g, teniendo cuidado que la división no puede ser realizada pora los valores de x tales que $g(x) = 0$.

Ejemplo.

1. Si $f(x) = 2x^2 - x + 1$ y $g(x) = x - 2$ entonces:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{2x^2 - x + 1}{x - 2}.$$

Nótese que en este ejemplo la división no es exacta pues tiene un resto de 7.

Nota. *Cuando las funciones f y g son polinomios (con el grado de f mayor o igual que el grado de g) la división siempre genera un polinomio más una fracción (que puede ser nula). El polinomio f se llama dividendo, el polinomio g se llama divisor, el polinomio resultado de la división se llama cociente. El resto de la división es otro polinomio de grado menor estricto que el grado del polinomio g (en el ejemplo anterior, el resto es un polinomio constante igual a 7). Además existe un resultado llamado teorema del resto para polinomios que afirma que*

$$f(x) = g(x)c(x) + r(x),$$

donde los polinomios $c(x)$ y $r(x)$ son el polinomio cociente y el polinomio resto respectivamente. Luego

$$\frac{f(x)}{g(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{g(x)}.$$

2. Si $f(x) = log_4(x)$ y $g(x) = x^3 - 2x - 1$ entonces:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{log_4(x)}{x^3 - 2x - 1}$$

El dominio de la función división $\frac{f}{g}$ es el conjunto de todos los valores x donde se puede calcular $\frac{f(x)}{g(x)}$. Luego

$$Dom\left(\frac{f}{g}\right) = [Don\ f\ \cap\ Dom\ g]\backslash\{x \in \mathbb{R}: g(x) \neq 0\}.$$

Nota. *A partir de la división entre funciones y de las funciones trigonométricas seno y coseno se pueden definir las restantes funciones trigonométricas. En efecto, las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante se definen de la siguiente manera:*

1. *La función tangente, denotada por* $\tan$, *está definida como*

$$tan(x) = \frac{sin(x)}{cos(x)}.$$

2. *La función cotangente, denotada por* $ctan$, *está definida como*

$$ctan(x) = \frac{cos(x)}{sin(x)}.$$

3. *La función secante, denotada por* sec, *está definida como*

$$sec(x) = \frac{1}{cos(x)}.$$

4. *La función cosecante, denotada por* csc, *está definida como*

$$csc(x) = \frac{1}{sin(x)}.$$

Se deja como ejercicio para el lector consultar cuál es el dominio y recorrido de las funciones definidas anteriormente.

Naturalmente se pueden formar funciones más complejas combinando las cuatro operaciones definidas hasta este momento.

De las operaciones mencionadas, al inicio del parágrafo 1.3, la más importante es la composición de funciones pues a partir de esta operación se pueden formar funciones que tienen un mayor grado de complejidad que aquellas que se forman con las cuatro operaciones definidas anteriormente.

1.3.5 Composición de funciones

Sean f y g dos funciones, la composición de la función f con la función g está definida de la siguiente manera:

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big),$$

Donde el símbolo $\circ$ es el símbolo de composición.

Nótese que para realizar la composición de las funciones f y g se tiene que cambiar el argumento de la función f de x a $g(x)$. Por ejemplo, si

$$f(x) = x^2 - 2x + 1$$

$$g(x) = \frac{x+1}{x-1},$$

entonces:

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 - 2\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + 1$$

Mientras

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(x^2 - 2x + 1) = \frac{x^2 - 2x + 1 + 1}{x^2 - 2x + 1 - 1} = \frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 - 2x}$$

Como muestra el ejemplo anterior, en general, $f \circ g \neq g \circ f$

Nota. *Desde la definicón de $f \circ g$ podemos darnos cuenta que para poder realizar esta composición se necesita que $Rec\ g \subseteq Dom\ f$. Luego*

$$Dom\ (f \circ g) = \{x \in Dom\ g : g(x) \in Dom\ f\}.$$

Esta restricción en el dominio de una composición entre funciones se la debe tomar en cuenta al momento de presentar el resultado de la composición.

La noción de composición de funciones se puede extender sin ninguna dificultad a la composición de un número finito de funciones. Por ejemplo, si $f(x) = x^2, g(x) = \frac{2}{x^2+x-2}$ y $h(x) = \frac{1}{x}$, entonces

$$(f \circ g \circ h)(x) = f\left(g\big(h(h)\big)\right) = f\left(g\left(\frac{1}{x}\right)\right) = f\left(\frac{2}{\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \frac{1}{x} - 2}\right)$$

$$= \left(\frac{2}{\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \frac{1}{x} - 2}\right)^2$$

Como se puede observar en el último ejemplo, la composición de funciones puede generar funciones muy complicadas a partir de funciones elementales. Lo interesante de esto es que, casi siempre, se pueden extraer las funciones elementales que generaron una función compleja. Por ejemplo, la función definida por

$$f(x) = \frac{(x^3 - 2x + 3)^2 + x^3 - 2x + 3}{(x^3 - 2x + 3)^5 - 1}$$

fue generada a partir de la composición de las funciones definidas por $g(x) = \frac{x^2+x}{x^5-1}$ y $h(x) = x^3 - 2x + 3$ como $g \circ h$.

1.4 Función inversa

En muchas ocasiones es importante o incluso necesario despejar la variable x de la expresión $f(x) = y$ (donde f es una función) de tal forma que la ecuación resultante para x sea una función, en los casos en que esto es posible se dice que la función que define x a partir de y es la función inversa de f y se escribe $f^{-1}(y) = x$.

Antes de establecer cuales son las condiciones que se pide a la función f para asegurar la existencia de su función inversa f^{-1} necesitamos desarrollar algo de teoría.

1.4.1 Función inyectiva, sobreyectiva y biyectiva

Para que una relación f entre los elementos x de un conjunto A y los elementos y de un conjunto B sea una relación funcional, es decir, para que la igualdad

$f(x) = y$ defina una función[3] es necesario que cada elemento x de A esté relacionado con un único elemento y de B.

Supongamos que nuestro objetivo es hallar la función inversa f^{-1} de una función f. Si $x_1 \neq x_2$ y $f(x_1) = f(x_2) = y$, entonces se tendría que la función inversa tiene dos valores en y. En efecto, $f^{-1}(y) = x_1$ y tambien $f^{-1}(y) = x_2$. Luego, f^{-1} no sería una función. La forma de solucionar este problema es pidiendo que la función f satisfaga la siguiente propiedad: si $x_1 \neq x_1$, entonces $f(x_1) \neq f(x_2)$. Una función que cumple con esta propiedad se dice que es inyectiva. A continuación damos su definición.

Definición. *Sea f una función. Se dice que f es una función inyectiva cuando se satisface la siguiente propiedad:*

$$Si\ x_1, x_2 \in Dom\ f\ y\ x_1 \neq x_1,\ entonces\ f(x_1) \neq f(x_2).$$

Nota. *En la practica, para comprobar que una función f es inyectiva se utiliza la siguiente condición (equivalente a la condición dada en la definición):*

$$Si\ f(x_1) = f(x_2),\ entonces\ x_1 = x_1.$$

Ejemplo. Probar que la función definida por $f(x) = \frac{3x+1}{x-1}$ es inyectiva.

Solución. Supongamos que $f(x_1) = f(x_2)$. Luego $\frac{3x_1+1}{x_1-1} = \frac{3x_2+1}{x_2-1}$. Multiplicando se tiene

[3] Para indicar en forma rigurosa que los elementos $x \in A$ están relacionados con los elementos $y \in B$ a través de una relación f se escribe xfy. Nosotros escribimos $f(x) = y$ para que sea más fácil la utilización de un lenguaje coloquial.

$$3x_1x_2 - 3x_1 + x_2 - 1 = 3x_1x_2 - 3x_2 + x_1 - 1.$$

Simplificando se tiene que $-4x_1 = -4x_2$, luego $x_1 = x_2$.

La función definida por $f(x) = x^2 + 1$ es un ejemplo de una función que no es inyectiva En efecto, suponemos que $f(x_1) = f(x_2)$. Luego, a partir de la definición de f, se tiene que $x_1^2 + 1 = x_2^2 + 1$, simplificando tenemos $x_1^2 = x_2^2$, por tanto $x_1 = \pm x_2$.

Existe una forma gráfica de averiguar cuando una función es inyectiva. Trazamos rectas horizontales, si estas rectas cortan a la gráfica de la función en un solo punto, entonces la función es inyectiva, caso contrario no es inyectiva.

Las figuras 1.21 y 1.22 muestran esta ocurrencia.

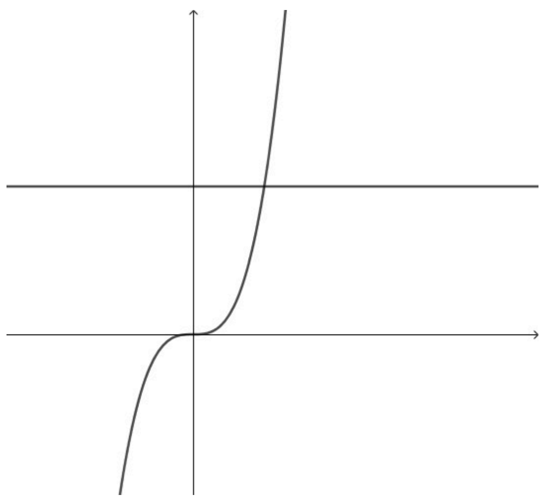


Figura 0.21. Gráfico de una función inyectiva.

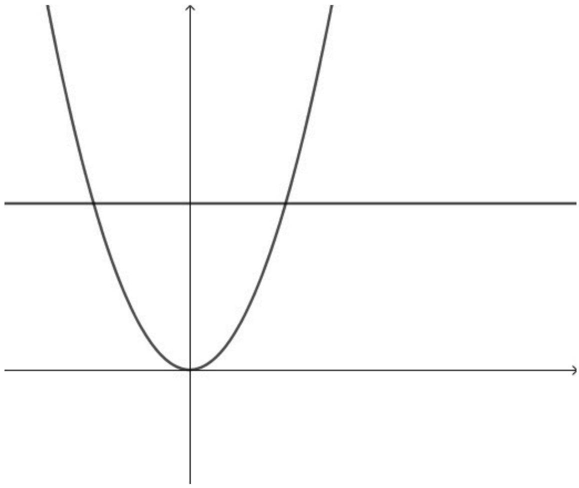


Figura 0.22. Gráfico de una función que no es inyectiva.

Otro concepto ligado con la busqueda de la condiciones para la existencia de la función inversa es el de función sobreyectiba. Su definición es la siguiente:

Definición. *Sea f una función. Se dice que f es una función sobreyectiva cuando se satisface la siguiente propiedad:*

Para todo número real y existe $x \in Dom\, f$ tal que $f(x) = y$.

Ejemplo. Averiguar si la función definida por $f(x) = 5x - 2$ es sobreyectiva.

Solución. Sea y un número real, queremos averiguar si existe x en el dominio de f tal que $f(x) = y$. La forma de lograr esto despejar el valor de x desde la expresión $f(x) = y$, luego de realizar este cáculo debemos preguntarnos: ¿para qué valores de la variable y tiene sentido el valor de x? Si la respuesta es para todos los valores reales de la variable y, entonces la función es sobreyectiva caso contrario, no es sobreyecyiva. En nuestro ejemplo tenemos que $x = \frac{y+2}{5}$ y puesto que el valor de x se lo puede calcular paro todo valor real de la variable y, la función definida por $f(x) = 5x - 2$ es sobreyectiva.

Ejemplo. Averiguar si la función definida por $f(x) = 2x^2 + x - 1$ es sobreyectiva.

Solución. Despejando la variable x de la expresión $2x^2 + x - 1 = y$ tenemos $x = \frac{-1 \pm \sqrt{8y+9}}{4}$. Luego, la variable x se la puede calcular únicamente cuando $8y + 9 \geq 0$, es decir cuando $y \geq -\frac{9}{8}$. Luego, la función no es sobreyectiva.

La siguiente definición es de fundamental importancia en el estudio de la función inversa.

Definición. *Una función f se dice que es biyectiva cuando es inyectiva y sobreyectiva.*

La función definida por $f(x) = x^3 + 1$ es biyectiva. En efecto, la función es inyectiva pués si $f(x_1) = f(x_2)$, entonces $x_1^3 = x_2^3$, luego $x_1 = x_1$. Además, si $x^3 + 1 = y$, entonces $x = \sqrt[3]{y - 1}$, luego la función es sobreyectiva.

Sea f una función biyectiva. Por un lado, la inyectividad de f nos permite asegurar que la preimagen de $y \in Rec\, f$ es única, luego tiene sentido preguntarse por la función inversa de f. Por otro lado, la sobreyectividad de f nos permite asegurar que todos los números reales han de tener una preimagen, reforsando aún más la creencia de la existencia de la función inversa f^{-1} de f.

Definición. *Sea f una función biyectiva. Se dice que la función f^{-1} es la función inversa de f si se satisface las siguientes condiciones:*

1. $(f \circ f^{-1})(x) = x$.

2. $(f^{-1} \circ f)(x) = x$.

Por razones obvias se tiene que si f^{-1} es la función inversa de f también f es la función inversa de f^{-1}, esto es $(f^{-1})^{-1} = f$.

Desde la definicón de la función esponencial y función logarítmo se tiene que: si $f(x) = a^x$, entonces $f^{-1}(x) = log_a(x)$. Además, invirtiendo los papeles se tiene que si $f(x) = log_a(x)$, entonces $f^{-1}(x) = a^x$.

El siguiente teorema muestra que la función inversa es única.

Teorema. *Sea f una función biyectiva. f^{-1} es única.*

Demostración. Supongamos que existe una función $g \neq f^{-1}$ tal que g satisfaga las condiciones de la definición de función inversa. Puesto que la función g es la función inversa de f, tenemos

$$\begin{aligned} f^{-1}(x) &= f^{-1}\big((f \circ g)(x)\big) \\ &= \big(f^{-1} \circ (f \circ g)\big)(x) \\ &= \big((f^{-1} \circ f) \circ g\big)(x) \\ &= (f^{-1} \circ f)\big(g(x)\big) \\ &= g(x). \end{aligned}$$

Puesto que $f^{-1}(x) = g(x)$ para todo x, tenemos que $f^{-1} = g$ lo que contradice nuestra suposición original. Luego la función invesa tiene que ser única.

Nota. *Cuando queremos hallar la función inversa de una función f, lo primero que debemos comprobar es la biyectivadad de f. Cuando la función no es biyectiva siempre podemos modificar el dominio y el recorrido de f para que la función modificada sea biyectiva pero en este texo introductorio no discutimos estos detalles.*

En los ejemplos siguientes se pide hallar la función inversa f^{-1} de f.

1. Hallar la función inversa de $f(x) = 2x + 1$. En este caso, f es una función biyectiva (comprobarlo), luego tiene sentido calcular f^{-1}. Para hallar la función inversa de f se tiene que despejar la variable x de la expresión $2x + 1 = y$. Se tiene que $2x = y - 1$ de lo cual resulta $x = \frac{y-1}{2}$. La función inversa por tanto es $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$.

2. Hallar la función inversa de $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$. En este ejemplo la función f no es biyectiba (comprobarlo). Sin embargo, podemos restringuir el dominio de f al conjunto $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ y el recorrido al conjunto $\mathbb{R}\backslash\{1\}$. Con este nuevo dominio y recorrido la función f (en realidad la restricción de la función f) se vuelve biyectiva. Para hallar la función inversa de f (en realidad de la función modificada) se tiene que despejar la variable x de la expresión $\frac{x-1}{x+1} = y$. Se tiene que $x = \frac{1+y}{1-y}$ (hacer los cálculos). La función inversa por tanto es $f^{-1}(x) = \frac{1+x}{1-x}$.

3. Hallar la función inversa de $f(x) = x^3 - 7$. En este caso la función es biyectiva. Luego podemos calcular su función inversa. En este caso se tiene que $x^3 - 7 = y$, al despejar la variable x de esta expresión se tiene que $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{y+7}$

Nota. *Para muchas funciones no es posible calcular con procesos algebraicos la función inversa, simplemente no es posible saber cuál es la expresión para la función inversa. Por ejemplo, la función definida como $f(x) = x^5 + x$ no permite calcular la función inversa. Aunque se conoce que existe no sabemos cuál es su forma analítica.*

Para otras funciones se sabe que no tienen inversa, por ejemplo la función $f(x) = x^2$ no tiene inversa, pues si intentamos despejar la variable x de la expresión $y = x^2$ se tendría que $x = \pm\sqrt{y}$ con lo cual se pierde toda noción de función.

1.4.2 Funsiones trigonométricas inversas

Las llamadas funciones trigonométricas inversas juegan un papel importante en las aplicaciones que se pueden hacer de la matemática a las ciencias y a la ingeniería. Nosotros las tratamos en esta parte para tener un abanico más amplio de funciones con las que podamos trabajar en temas posteriores.

La función arco seno

Como se indicó anteriormente (ver subseción 1.2.5), la función seno no es una función biyectiva por tanto no podemos hablar de la función inversa de la función seno. Sin embargo, podemos modificar la función (ver la nota de la página 48) para que la nueva función sea biyectiva y por tanto, podamos hablar de la funcion inversa de la función seno.

Considermos la función $sin\colon \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$. Esta función (que en rigor no es la función seno) resulta biyectiva, explicar por que, luego podemos hablar de su función inversa.

Definición. *Se llama función arco seno, denotada por $arcsin$, a la función*

$$arcsin\colon [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

tal que:

1. $sin(arcsin\, x) = x$,

2. $arcsin(sin\, x) = x$.

Según la definición de función inversa se tiene que la función $arcsin$ es la función inversa de la función seno.

Nota. *Es habitual denotar sin^{-1} a la función inversa de sin, nosotros utilizamos libremente cualquiera de las dos alternativas.*

La función arco coseno

Como se indicó anteriormente, la función coseno no es una función biyectiva por tanto no podemos hablar de la función inversa de la función coseno. Sin embargo, podemos modificar su dominio y recorrido para que la nueva función sea biyectiva y por tanto, poder hablar de la funcion inversa de la función coseno.

Considermos la función $cos: [0, \pi] \to [-1,1]$. Esta función (que en rigor no es la función coseno) resulta biyectiva, dar una explicación de esta afirmación, luego podemos hablar de la función inversa de la función coseno.

Definición. *Se llama función arco coseno, denotada por $arccos$, a la función*

$$arccos: [-1,1] \to [0, \pi],$$

tal que:

1. $cos(arccos\, x) = x$,

2. $arccos(cos\, x) = x$.

Según la definición de función inversa se tiene que la función $arccos$ es la función inversa de la función coseno.

Nota. *Es habitual denotar cos^{-1} a la función inversa de cos, nosotros utilizamos libremente cualquiera de las dos alternativas.*

La función arco tangente

La función tangente no es una función biyectiva por tanto, no se puede hablar de la función inversa de la función tangente. Sin embargo, podemos modificar la función para que la nueva función sea biyectiva y por tanto, poder hablar de la funcion inversa de la función tangente.

Considermos la función $tan: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow (-\infty, +\infty)$, donde los símbolos $+\infty$ y $-\infty$, llamados más infinito y menos infinito respectivamente, no son números reales y son utilizados intuitivamente para denotar un número más grande (en longuitud) que cualquier número real.

Esta función (que en rigor no es la función tangente) resulta biyectiva, dar una explicación de esta afrimación, luego podemos hablar de la función inversa de la función tangente.

Definición. *Se llama función arco tangente, denotada por $arctan$, a la función*

$$arctan: (-\infty, +\infty) \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

tal que:

1. $tan(arctan\, x) = x$,

2. $arctan(tan\, x) = x$.

Según la definición de función inversa se tiene que la función $arctan$ es la función inversa de la función tangente.

Nota. *Es habitual denotar tan^{-1} a la función inversa de tan, nosotros utilizamos libremente cualquiera de las dos alternativas.*

Se deja como ejercicio para el lector averigual como están definidas las funciones arco secante y arco cosecante.

1.5 Aplicaciones

En esta sección, se explica cómo se aplica la teoría de funciones a diversas situaciones reales. Uno de los casos más comunes es cuando se usan datos discretos para construir una función lineal que aproxima los datos. Tal función proporciona un modelo lineal de la situación, que puede usarse (dentro de ciertos límites) para predecir el comportamiento futuro.

El siguiente ejemplo se ha tomado de Lial, M., & Hungerford T, *Matemáticas para administración y economía*.

Ejemplo. El costo anual promedio de colegiatura en universidades públicas con planes de cuatro años se ha elevado continuamente, como se ilustra en la siguiente Tabla.

Tabla 1.1 Costo de colegiatura en universidades publicas con planes de cuatro años

Año	1981	1983	1985	1987	1988	1991	1993	1995
Costo	\$909	\$1148	\$1318	\$1537	\$1781	\$2137	\$2527	\$2686

Fuente: LIAL, HUNGERFORD. Matemáticas para administración y economía. Séptima edición. Pearson 2000

a. Muestre esta información en una gráfica.

   Consideramos que $x = 0$ representa 1980, $x = 1$ representa 1981, etc. Marcamos los puntos dados por la tabla.

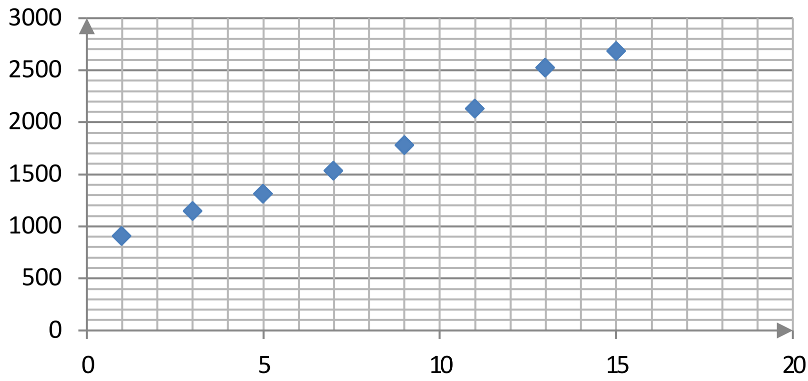


Figura 0.23. Gráfico de los puntos de la Tabla 1.

b. Los puntos en el gráfico anterior no se encuentran sobre una recta, pero se acercan bastante a una. Encuentre un modelo lineal para esos datos.

Existen varios métodos para encontrar una recta que, por decirlo de alguna manera, "mejor se ajuste" a los datos. Usaremos un enfoque simple. Escogemos dos de los puntos de la figura y dibujamos la recta que determinan. Todos los puntos dados se encuentran razonablemente cerca de esta recta.

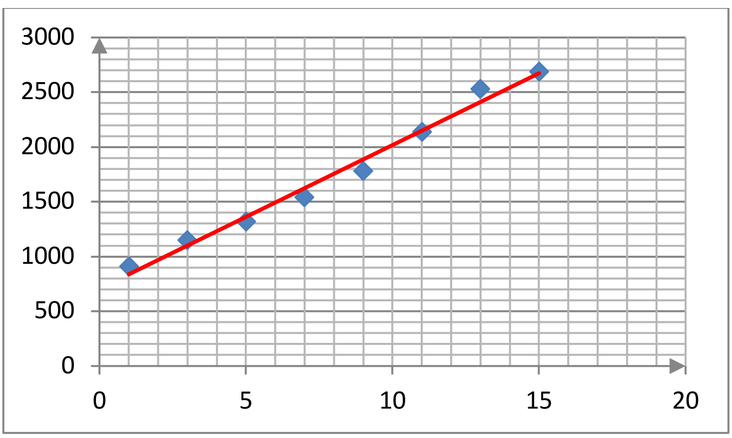


Figura 0.24. Gráfico de la recta que ajusta los datos de la Tabla 1.

El proceso analítico para hallar la ecuación de la recta (y por tanto la función lineal que buscamos) es utilizar la fórmula

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1),$$

donde (x_1, y_1), (x_2, y_2) son un par de puntos dados. En nuestro caso escojemos $(x_1, y_1) = (5{,}1318)$ y $(x_2, y_2) = (7{,}1537)$. Con estos valores se tiene:

$$\begin{aligned}
y - 1318 &= \frac{1537 - 1318}{7 - 5}(x - 5)\\
y - 1318 &= \frac{219}{2}(x - 5)\\
y - 1318 &= 109.5(x - 5)\\
y - 1318 &= 109.5x - 547.5\\
y &= 109.5x - 547.5 + 1318\\
y &= 109.5x + 770.5
\end{aligned}$$

Por tanto, la función $f(x) = 109.5x + 770.5$ proporciona un modelo lineal de la situación.

c. Use el modelo lineal del literal b para estimar el costo anual promedio de colegiatura en 1984 y 2001.

De acuerdo con el modelo se tiene que 1984 corresponde a $x = 4$, el costo promedio para ese año es $f(4) = 1208.5$. Para el año 2001 se tiene que $x = 21$ con lo cual se tiene que el costo promedio para ese año es $f(21) = 3070$.

Nota. *Un modelo lineal no tiene que ser exacto para todos los valores de* x*, por ejemplo, el modelo anterior sugiere que el costo promedio para el año 1970 (correspondiente a* $x = -10$*) es* -105.5*, que claramente no tiene sentido. Del mismo modo, este modelo tal vez no pronostica adecuadamente los costos en un futuro lejano.*

Ejemplo. La siguiente tabla muestra las ventas en dos años diferentes en dos tiendas de una cadena de tiendas de descuento.

Tabla 1.2 Ventas en años de dos tiendas de una cadena de descuento

Tienda	Ventas en 1992	Ventas en 1995
A	100000	160000
B	50000	140000

Fuente: LIAL, HUNGERFORD. Matemáticas para administración y economía. Séptima edición. Pearson 2000

Un estudio de los libros de la empresa sugiere que las ventas de ambas tiendas han crecido linealmente (es decir, las ventas pueden aproximarse por una función lineal con bastante precisión). Encuentre una ecuación lineal que describa las ventas de la tienda A.

Para encontrar una ecuación lineal que describa las ventas consideremos que $x = 0$ representa 1992, luego 1995 corresponde a $x = 3$. Desde la tabla anterior, la recta que representa las ventas de la tienda A pasa por los puntos $(0,100000)$ y $(3, 160000)$, la ecuación de la recta es $y = 20000x + 100000$

Nota. *Las ventas de la tienda A en el ejemplo anterior crecieron de 100000 a 160000 en el período de 1992 a 1995 representando un incremento total de 60000 en tres años. Se define la "razón de crecimiento promedio de ventas" de la siguiente manera:*

$$\text{Razón de crecimiento promedio de ventas} = \text{RCV} = \frac{\text{incremento en ventas}}{\text{incremento de años}}$$

En nuestro ejemplo se tiene que $RCV = \frac{60000}{3} = 20000$; hay que notar que RCV coincide con la pendiente de la recta que representa las ventas de la tienda A. Es fácil ver que sucede lo mismo con la tienda B (comprobarlo como ejercicio). En general, una función lineal definida por $f(x) = mx + b$ tiene una razón de cambio promedio de y con respecto a x igual a su pendiente m.

Ejemplo. Se espera que los costos (en dólares) de los gastos médicos de una familia promedio crezcan cada año de acuerdo con la ecuación

$$y = 510x + 4300,$$

donde x es el número de años desde 1990. Según esta estimación, ¿cuánto costaron los cuidados médicos de una familia promedio en 1996? ¿Cuál es la razón de crecimiento promedio?

Hacemos $x = 1996 - 1990 = 6$. Así, los costos de salud fueron

$$y = 510(6) + 4300 = 7360.$$

Es decri, los costos de salud luero 7360 dólares. La razón de crecimiento promedio del costo se da por la pendiente de la recta. Ya que la pendiente es

510, este modelo indica que los costos de salud se incrementarán en \$510 cada año.

Ejemplo. Un edificio de apartamentos tiene 60 departamentos. Se puede rentar todos los departamentos si la renta es de \$180 mensuales; a una renta mayor, algunos de los departamentos permanecerán vacíos. En promedio, por cada incremento de \$5 en la renta, 1 departamento quedará vacante sin posibilidad de rentarlo. Hallar el valor de la renta de cada departamento para que el ingreso por concepto de renta de los departamentos sea máximo. ¿Cuál es el ingreso máximo?

Sea x el número de veces que se incrementa la renta. Luego

- $180 + 5x$ representa la renta de cada departamento cuando se ha incrementado x veces la renta.

- $60 - x$ representa el número de departamentos rentados cuando se ha incrementado x veces la renta.

Denotamos por $Ingr$ el ingreso por concepto de la renta de los departamentos. Luego se tiene que

$$Ingr = (180 + 5x)(60 - x).$$

Realizando operaciones se tiene que $Ingr = -5x^2 + 120x + 10800$. La función $Ingr$ es una función cuadrática cuyo coeficiente de x^2 es negativo, luego está tiene un máximo en el vértice (ver pag. 34 y 35). Realizando los calculos se tiene que $x = 12$ es el valor donde se alcanza el máximo. Asi el valor de la renta de cada departamento, para que el ingreso sea máximo, esta dato por

$$180 + 5x = 180 + 5(12) = 240.$$

Además, el ingreso máximo es $Ingr_{max} = 11520$.

1.5.1 Modelos de costo lineal

En la producción de cualquier bien por una empresa, intervienen dos tipos de costos, que se conocen como costos fijos y costos variables. A los costos fijos hay que enfrentarse sin importar la cantidad producida del artículo; es decir, no dependen del nivel de producción. Ejemplos de costos fijos son las rentas, intereses sobre préstamos, salarios de administración, etc. Los costos variables dependen del nivel de producción, es decir, de la cantidad de artículos producidos. Ejemplos de costos variables son los materiales y la mano de obra, etc. De esta manera se tiene que:

$$\text{costo total} = \text{costos variables} + \text{costos fijos}$$

Si se considera el caso en el que los costos variables por unidad de artículo son constantes se tiene que los costos variables totales son proporcionales a la cantidad de artículos producidos. Si m denota el costo variable por unidad, entonces los costos variables totales, al producir x unidades de artículos, son de mx (dólares). Si los costos fijos se denotan con b (dólares), se concluye que el costo total y (en dólares) de producir x unidades está dado por:

$$y = mx + b$$

Una gráfica de esta ecuación de costo se muestra a continuación

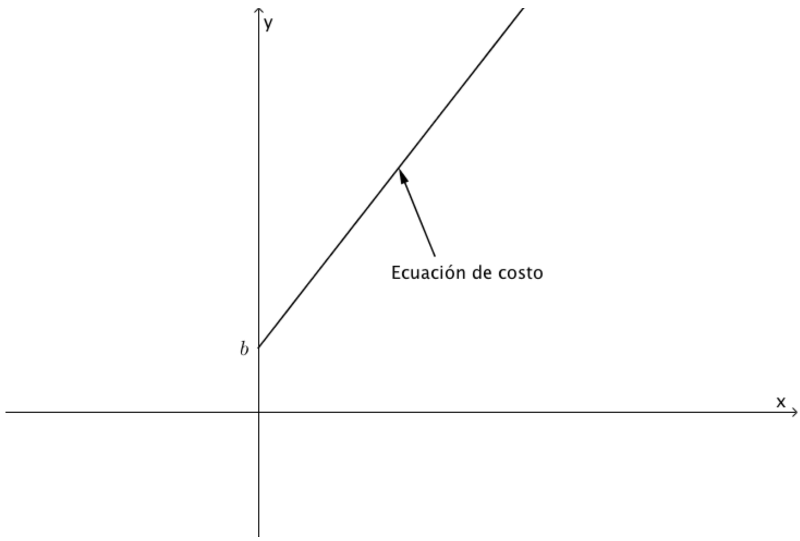


Figura 0.25. Gráfica de una ecuación de costo.

Nótese que se ha dibujado solamente valores positivos de x y de y (en el primer cuadrante), pues no tiene sentido valores negativos para el costos ni valores negativos para el número de artículos producidos.

Ejemplo. El costo variable de producir un kilo de granos de café es \$5 y los costos fijos por día son de \$3000.

a. Encuentre la ecuación de costo lineal y dibuje su gráfica.

Según lo que se vio anteriormente se tiene que $y = 5x + 3000$, la gráfica de esta ecuación de costo es

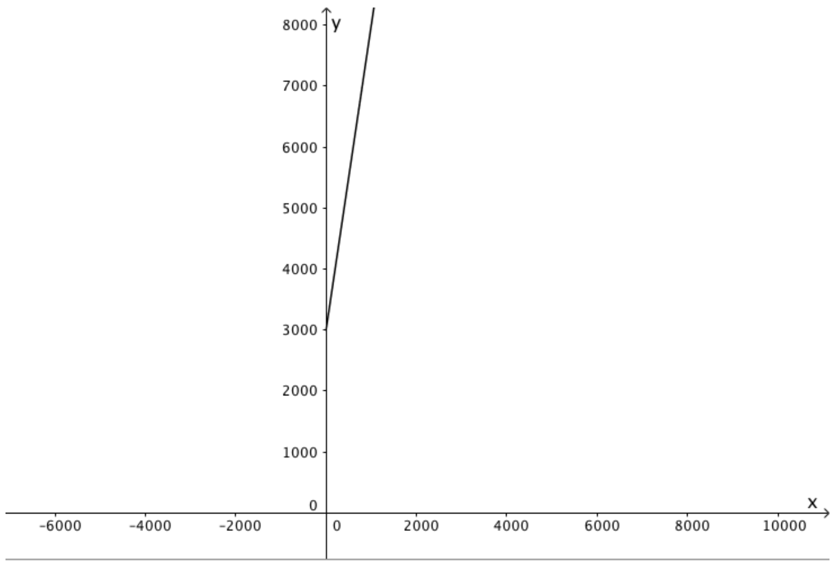


Figura 0.26. Gráfico de la ecuación de costo $\boldsymbol{y = 5x + 3000}$

b. Determinar el costo de procesar 1000 kilos de granos de café en un día.

Sustituyendo el valor de x por 1000 en la ecuación del literal (a) se tiene que

$$y = 5(1000) + 3000 = 8000$$

Ejemplo. El costo de fabricar 10 máquinas de escribir al día es de \$350, mientras que cuesta \$600 producir 20 máquinas del mismo tipo al día. Suponiendo un modelo de costo lineal, halle el costo total de producir x máquinas al día.

Solución. Se conocen los puntos $(10{,}350)$ y $(20{,}600)$ que están sobre la gráfica de un modelo de costo lineal. De tal manera que la pendiente será:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{600 - 350}{20 - 10} = 25$$

De esta forma obtenemos $y - 350 = 25(x - 10)$ o equivalentemente

$$y = 25x + 100.$$

1.5.2 Análisis del punto de equilibrio

Si el costo total y_c de producción excede al de los ingresos y_r, obtenidos por las ventas, entonces el negocio sufre una pérdida. Por otra parte, si los ingresos sobrepasan a los costos, existe una utilidad. Si el costo de producción es igual a los ingresos obtenidos por las ventas no hay utilidad ni pérdida, de modo que el negocio está en un punto de equilibrio. El número de unidades producidas y vendidas en este caso se denomina punto de equilibrio.

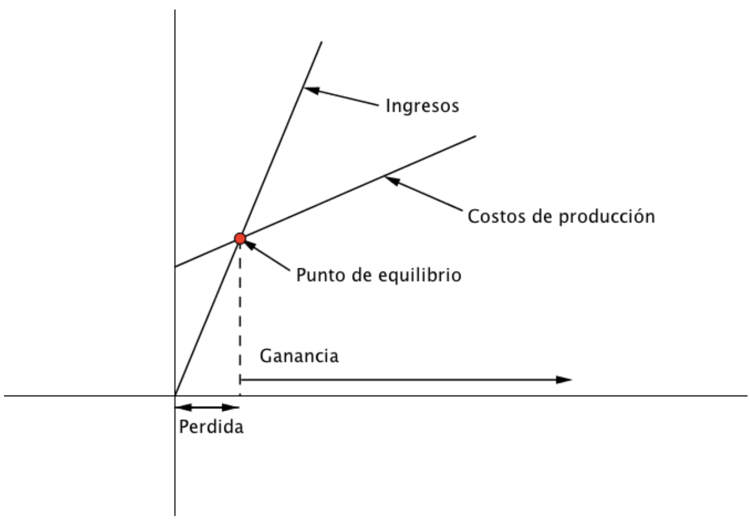


Figura 0.27. Gráfico del punto de equilibrio.

Ejemplo. Para un fabricante de relojes, el costo de mano de obra y de los materiales por reloj es de \$15 y los costos fijos son de \$2000 al día. Si se vende cada reloj a \$20. ¿Cuántos relojes deberá producir y vender cada día para garantizar que el negocio se mantenga en el punto de equilibrio?

Solución. Sea *x* el número de relojes producidos y vendidos cada día. Luego, el costo total de producir *x* relojes es:

$$y_c = \text{costos variables totales} + \text{costos fijos}$$
$$y_c = 15x + 2000$$

Si se vende a \$20 cada reloj, el ingreso y_r será $y_r = 20x$.

En el punto de equilibrio no hay ganancia ni perdida, por tanto:

$$20x = 15x + 2000.$$

Es decir, $x = 400$.

Nota. *Se puede observar que:*

1. *Si* $x > 400$*, entonces* $y_r > y_c$*. Luego hay utilidad*
2. *Si* $x < 400$*, entonces* $y_r < y_c$*. Luego existen pérdidas*
3. *El punto de equilibrio corresponde a la intersección de las rectas que representan al costo de producción y a los ingresos.*

1.5.3 Depreciación en línea recta

Cuando una compañía compra equipo o maquinaría, registra el valor de tal equipo como uno de los activos en su balance general. Al pasar los años este valor decrece porque el equipo se desgasta o se hace obsoleto. Esta reducción gradual en el valor de un activo se conoce como depreciación. Uno de los métodos ordinarios para calcular la cantidad de depreciación es reducir el valor por una cantidad constante cada año, de tal manera que el valor se reduzca a valores de desecho al término de la vida útil destinada para cada equipo. Esto se denomina depreciación en línea recta.

$$\text{Tasa de depreciación (por año)} = \frac{\text{Valor inicial} - \text{Valor de desecho}}{\text{vida útil en años}}$$

Ejemplo. Una empresa compra maquinaria por \$150000. Se espera que la vida útil de la maquinaria sea de 12 años con valor de desecho cero. Determine la cantidad de depreciación por año y una fórmula para el valor depreciado después de x años.

Solución. En este caso se tiene:

$$\text{Tasa de depreciación (por año)} = \frac{\text{Valor inicial} - \text{Valor de desecho}}{\text{vida útil en años}}.$$

Realizando los cálculos se tiene que la tasa de depreciación es 12500. El valor después de x años será:

$$\begin{aligned}\text{valor después de } x \text{ años}\\ &= \text{Valor inicial} - \text{tasa de depreciación} \times \text{número de años}\\ &= 150000 - 12500x\end{aligned}$$

Para algunos años se tiene la siguiente tabla:

x	Valor
0	150000
2	125000
4	100000
8	50000
12	0

1.5.4 Oferta y demanda

Las leyes de la oferta y la demanda son dos de las relaciones fundamentales en cualquier análisis económico. La cantidad x de cualquier artículo que será adquirida por los consumidores depende del precio en el que el artículo esté disponible. Una relación que especifique la cantidad de un artículo determinado que los consumidores están dispuestos a comprar, a varios niveles de precios, se denomina ley de la demanda. La ley más simple es una relación del tipo

$$x = mp + b,$$

donde:

- p es el precio por unidad del artículo
- m y b son constantes

La gráfica de una ley de demanda se llama curva de demanda. Es un hecho conocido que si el precio por unidad de un artículo aumenta, la demanda por el artículo disminuye, porque menos consumidores podrán adquirirlo, mientras que si el precio por unidad disminuye, (es decir el artículo se abarata) la demanda se incrementa. En otras palabras, la pendiente m de la relación de la demanda es negativa. De modo que la gráfica de la ecuación tiene una inclinación que baja hacia la derecha como se aprecia en la siguiente figura

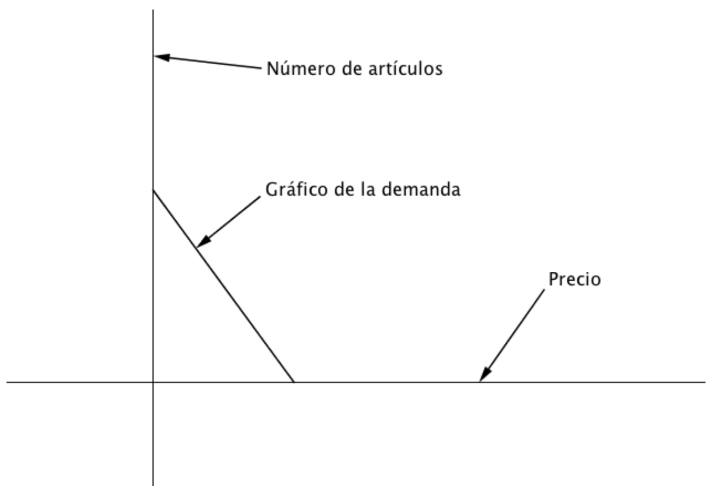


Figura 0.28. Gráfico de la demanda.

Nota. *Es costumbre que el eje x represente el número de artículos y el eje y represente al precio de esos artículos. Nosotro nos salimos de esta constumbre para hacer mas natural la gráfica de $x = mp + b$, donde x representa el número de artículos demandados y p el precio de esos artículos.*

Puesto que el precio p por unidad de cada artículo y la cantidad x demandada no son números negativos, la curva de la demanda se debe dibujar en el primer cuadrante.

La cantidad de un artículo determinado que sus proveedores están dispuestos a ofrecer después del precio al cual pueden venderlo se denomina oferta. Una relación que especifique la cantidad de cualquier artículo que los fabricantes (o vendedores) pueden poner en el mercado a varios precios se denomina ley de la oferta.

La gráfica de una ecuación de la oferta se conoce como curva de la oferta. En general, los proveedores inundarán el mercado con una gran cantidad de artículos, si pueden ponerle un precio alto, y con una cantidad más pequeña de artículos si el precio obtenido es más bajo. En otras palabras, la oferta aumenta al subir el precio. Una curva de oferta típica se aprecia en la siguiente gráfica:

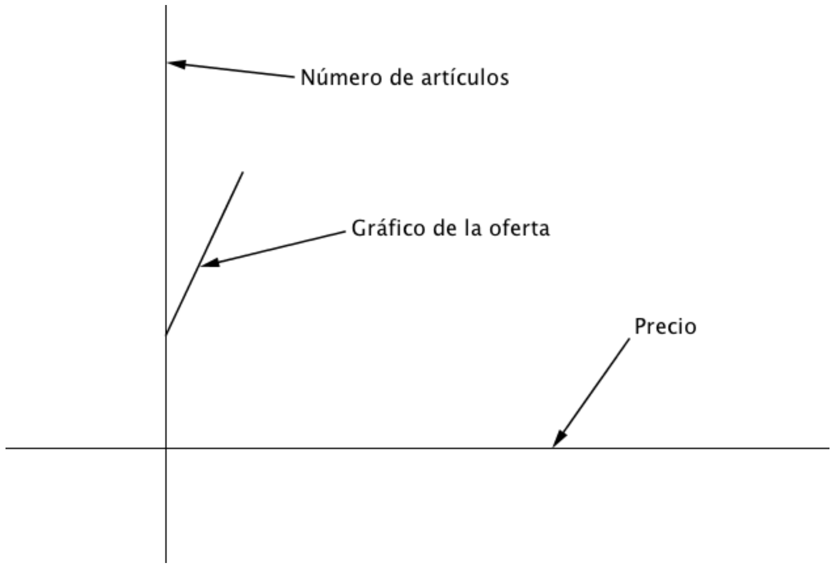


Figura 0.29. Gráfico de la oferta.

Al igual que la curva de la demanda, la curva de la oferta se tiene que dibujar en el primer cuadrante.

Nota. *Las ecuaciones de oferta y demanda también pueden expresar la relación del precio en función del número de artículos, es decir* $p = f(x)$.

1.5.5 Punto de equilibrio en el mercado

Si el precio de cierto artículo es demasiado alto, los consumidores no lo adquirirán, mientras si es demasiado bajo los proveedores no lo venderán. En un mercado competitivo, cuando el precio por unidad depende solo de la cantidad demandada y de la cantidad ofertada, siempre existe una tendencia del precio a ajustarse por sí mismo, de modo que la cantidad demandada por los consumidores se iguala a la cantidad que los proveedores están dispuestos a ofrecer. Se dice que el punto de equilibrio del mercado ocurre cuando a un precio la cantidad demandada es igual a la cantidad ofertada. Esto corresponde al punto de intersección de las curvas de oferta y demanda.

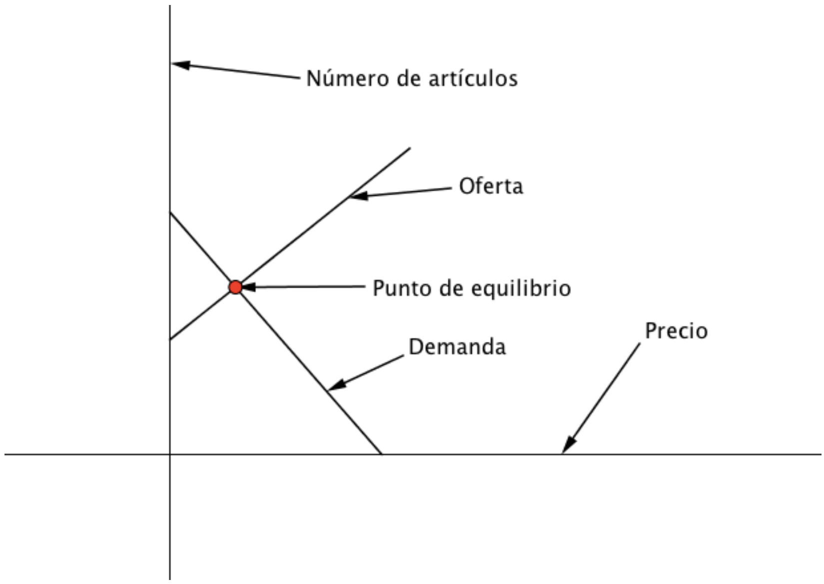


Figura 0.30. Gráfico del punto de equilibrio del mercado.

Nota. *El precio y la cantidad de artículos correspondientes al punto de equilibrio del mercado se denominan precio de equilibrio y cantidad de equilibrio respectivamente.*

Ejemplo. Determine el precio de equilibrio y la cantidad de equilibrio de las leyes de oferta y demanda siguientes.

Demanda: $p = 25 - 2x$

Oferta: $p = 3x + 5$

Solución. Como se indicó anteriormente para hallar el precio y la cantidad de equilibrio se tiene que resolver el sistema formado por las ecuaciones de oferta y demanda. Al realizar todos los cálculos se tiene que estos valores son:

$\text{precio de equilibrio} = 17 \qquad\qquad \text{cantidad de equilibrio} = 4$

Ejercicios del capítulo 1

1. Dados los puntos $P = (1,2)$ y $Q = (3,5)$, hallar:

- La ecuación de la recta que pasa por los puntos P y Q.

- La pendiente de la recta del literal anterior.

2. Sea $m = 4$ y $P = (3,5)$, hallar:

- La ecuación de la recta cuya pendiente es m y que pasa por el punto P.

- Graficar la recta del literal anterior.

3. Una fabrica de carretillas cuenta con dos empleados. Los costos variables por producir una carretilla ascienden a \$25. Los gastos por la adquisición de materia prima (considerar que son cosntantes) son de \$1500, además el pago a cada trabajador asciende a \$350. Suponiendo que este fenómeno es lineal, encuentre la ecuación que relacione los costos de producción. ¿Cuál es el costo de producir 100 unidades?

4. Un fabricante tiene costos fijos de \$3000 y costos variables de \$25 por unidad. Suponiendo que este fenómeno es lineal, encuentre la ecuación que relacione los costos de producción. ¿Cuál es el costo de producir 100 unidades?

5. A un precio de \$50 por tonelada, la demanda de cierto artículo es de 4500 toneladas, mientras que la oferta es de 3300 toneladas. Si el precio se incrementa en \$10 por tonelada, la demanda y la oferta serán de 4400 y 4200 respectivamente.

- Suponiendo linealidad, determine las leyes de la oferta y la demanda.

- Encuentre el precio y la cantidad de equilibrio.

6. Una compañía tiene costos fijos de \$2500 y los costos totales por producir 200 unidades son de \$3300.

- Suponiendo linealidad, escriba la ecuación de costo – producción.

- Si cada artículo producido se vende a \$5.25 encuentre el punto de equilibrio.

- Cuántas unidades deberán producirse y venderse de modo que resulte una utilidad de \$200.

7. Las ecuaciones de oferta y demanda para cierto producto son: $2p - x = 10$ y $p = \frac{8000}{x+370}$, donde p es el precio por unidad en miles de dólares y x es el número de unidades vendidas al mes.

- Encuentre el punto de equilibrio.
- Determine el ingreso total recibido por el fabricante en el punto de equilibrio.

8. Las ecuaciones de oferta y demanda para cierto producto son: $3p - 5x + 7 = 0$ y $2p + x - 3 = 0$, donde p es el precio por unidad en miles de dólares y x es el número de unidades vendidas al mes

- Hallar el punto de equilibrio.
- Cuánto es el ingreso total recibido por el fabricante en el punto de equilibrio?

Cápitulo 2

Límites y continuidad

La teoría moderna de límites tiene una rol importante en la matemática. Sin embargo, este concepto no fue la base del cálculo diferencial e integral en la época de su creación, debido sobre todo a que los matemáticos de quella epoca no lograron dar una definición de límite adecuada para su posterior aplicación. Aunque captaron una visión intuitiva de la idea esencial de límite, que nació al margen de sus necesidades de resolución de problemas prácticos.

Actualmente el concepto de límite es fundamental en el cálculo ya que permite desarrollarlo con una estructura lógica. En sus inicios, el cálculo trataba únicamente con funciones continuas y, por tanto, no se presentaba la necesidad de penetrar en el significado exacto de la continuidad; pero, en el siglo XVII, se presentaron algunas funciones discontinuas en relación con distintas clases de problemas físicos, que obligaron a los matemáticos de principios del siglo XIX a examinar cuidadosamente el significado del concepto de continuidad.

En este capítulo se estudia el concepto de límite de una función, luego, una vez que se tenga una noción de límite, se examina el concepto de continuidad de funciones.

2.1 Límite de una función

Al tratar con funciones de la forma $\frac{P(x)}{Q(\mathrm{x})}$ frecuentemente se realiza la cancelación de factores comunes en el numerador y denominador. Por ejemplo:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 - 1} \\
&= \frac{x(x-1)^2}{(x+1)(x-1)} \\
&= \frac{x(x-1)}{x+1}
\end{aligned}
$$

No hay dudas sobre la validez de la primera igualdad, cualquiera sea el número por el que sustituya x, la primera y la segunda fracción representan, ambas, el mismo número o no están definidas. Sin embargo, la segunda igualdad es cierta únicamente para valores de $x \neq 1$. Luego, esta doble igualdad es cierta para los x tales que $x - 1 \neq 0$.

Si se desea definir la primera fracción para $x = 1$, se lo puede hacer a partir de la última fracción haciendo $x = 1$. Esta forma de extender la definición de una función es natural, se considera un valor de x próximo a 1, pero diferente a 1, entonces las tres fracciones son iguales y en la última el numerador se aproxima a cero y el denominador a 2, por lo que la fracción se aproxima a cero.

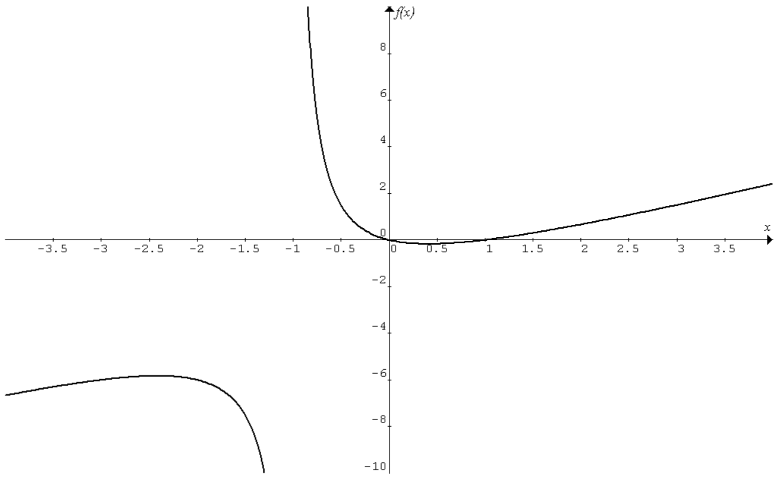


Figura 0.1. Gráfico de la función $\boldsymbol{f(x)} = \frac{\boldsymbol{x(x-1)}}{\boldsymbol{x+1}}$.

Lo anterior obedece al hecho de investigar el comportamiento de la función en puntos cercanos a 1. En términos más técnicos se dice que el límite de $f(x) = \frac{x^3-2x^2+x}{x^2-1}$ cuando x se acerca o tiende a 1 es cero, lo cual escribimos de la siguiente manera:

$$\lim_{x \longrightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 - 1} = 0.$$

La siguiente definición es una adaptación intuitiva de la definición formal de límite que se puede hallar en cualquier texto introductoria al cálculo diferencial.

Definición. *Sea f una función, $L \in \mathbb{R}$ y x_0 un valor que puede o no pertenecer al dominio de f. Se dice que $f(x)$ tiene límite L cuando x tiende a x_0 si los valores de $f(x)$ se acercan a L cuando x se acerca a x_0*[4].

[4] La definición que se presenta en este texto es demasiado intuitiva para el gusto de los matemáticos deseosos del rigor formal característico de su disciplina, sin embargo, para nuestros intereses es suficiente con esta idea de límite. Para los lectores que se hallen

Si f tiene límite L en x_0 escribimos $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$.

Nota: *El acercamiento a x_0 se puede realizar por la derecha o por la izquierda, es decir, con valores mayores o menores a x_0 respectivamente. Para que L sea el límite de $f(x)$ en x_0 este valor tiene que ser el mismo sin importar por donde nos acerquemos al valor de x_0.*

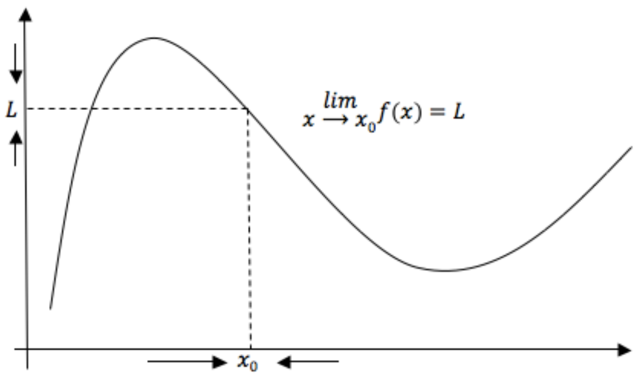


Figura 0.2. Gráfico de $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$.

interesados en la definición formal de límite de una función en un punto se les recomienda consultar la bibliografía que se presenta al final del texto.

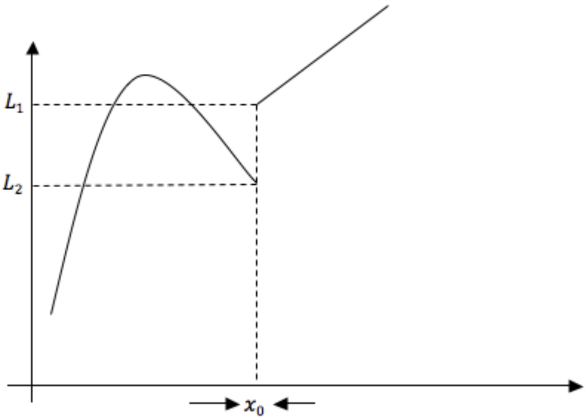


Figura 0.3. Gráfico de una función que no tiene ímite en $\boldsymbol{x_0}$.

Como se puede observar en el primer gráfico (ver figura 2.2) cuando x tiendo a x_0 los valores de $f(x)$ se acercan a L, es decir $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$. En el segundo gráfico (ver Figura 2.3) se puede observar que si x se acerca a x_0 por la derecha (valores mayores a x_0) los valores de $f(x)$ se acercan a L_1 mientras si lo hacen por la izquierda (valores menores a x_0) los valores de $f(x)$ se acercan a L_2, es decir, f no tiene límite en x_0.

Ejemplo. Calcular los límites siguientes:

a. $\lim_{x \to 0}(x^3 + 3x - 2)$

Para calcular este límite lo único que se tiene que hacer es reemplazar el valor hacia donde tiende x (en este ejemplo 0) en el valor de $f(x)$ (en este ejemplo $x^3 + 3x - 2$). Se tiene entonces que:

$$\lim_{x \to 0}(x^3 + 3x - 2) = 0^3 + 3(0) - 2 = -2.$$

b. $\lim_{x \to -1} \frac{x^2-1}{x+1}$

En este ejemplo el proceso efectuado en el ejemplo anterior no tiene sentido. En efecto, al realizar los reemplazos se generaría la forma $\frac{0}{0}$. Para realizar el cálculo de este límite primero buscamos una forma equivalente de $f(x)$;

$$\frac{x^2-1}{x+1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x+1}$$
$$= x-1.$$

Se tiene por tanto que:

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2-1}{x+1} =$$
$$= \lim_{x \to -1} (x-1)$$
$$= -2$$

Nota. *El primer ejemplo muestra que el proceso de calcular un límite se puede realizar reemplazando el valor hacia donde tiende x en la expresión dada para $f(x)$. El segundo ejemplo muestra que este proceso es permitido únicamente en los casos de no llegar a expresiones extrañas; estas formas extrañas se las conoc con el nombre de formas indeterminadas. Cuenado el primer procedimiento (primer ejemplo) conduce a una forma indeterminada lo que se tiene que hacer, mientras sea posible, es hallar una forma equivalente para $f(x)$ y luego proceder igual que el primer ejemplo.*

La siguiente definición, aunque redactada por los autores en su totalidad, se la puede hallar en cualquier texto de cálculo elemental.

Definición: *Se llama forma indeterminada a cualquiera de las siguientes expresiones:*

1. $\frac{0}{0}$.
2. $\frac{\infty}{\infty}$.
3. 1^{∞}.
4. $0 \cdot \infty$.
5. $+\infty - \infty$.
6. ∞^{0}.
7. 0^{0}.

Nota: *Las siete expresiones anteriores se llaman formas indeterminadas porque su valor no es único; es decir, el valor de estas es diferente en diferentes casos*[5].

Consideremos los siguientes ejemplos:

[5] Todo este discurso tiene sentido únicamente en la teoría de límites.

- $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2+2x-1}{x^2+3}$. Al realizar los cáculos directamente, se genera la forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$; se observará posteriormente que el resultado de este límite es 1; es decir,

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 + 3} = 1.$$

- $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^3-1}{x^2+7}$. Igual que el ejemplo anterior, los cálculos directos nos llevan a la forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$. El resultado es ∞, es decir,

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^3 - 1}{x^2 + 7} = \infty.$$

- $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^3+x-1}{x^5+3}$. Este límite todavía genera la forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$; su resultado es 0, es decir,

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^3 + x - 1}{x^5 + 3} = 0.$$

Puesto que el objetivo de este curso no es profundizar en la teoría de límites, nosotros no discutimos los pormenores de por qué se llega a estos resultados; para las personas que se hallen interesadas en profundizar sobre estos temas se les recomienda revisar la bibliografía que se presenta al final del texto.

Nota: *En la literatura matemática se pueden hallar dos límites, llamados fundamentales por su importancia teórica en el desarrollo de esta teoría, su enunciados se presenta a continuación:*

- *Limite fundamental trigonométrico* $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \frac{sen(x)}{x} = 1.$

- *Límite fundamental algebraico* $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e \approx 2.7183.$

Aunque estos límites hacen referencia a x, su forma es más general. En efecto, el límite fundamental trigonométrico y el límite fundamental algebtaico se los puede expersar a la siguiente forma:

- Límite fundamental trigonométrico $\lim\limits_{\Delta \rightarrow 0} \frac{sen(\Delta)}{\Delta} = 1.$

- Límite fundamental algebraico $\lim\limits_{\Delta \rightarrow 0} (1 + \Delta)^{\frac{1}{\Delta}} = e.$

Donde Δ puede representar cualquier expresión que tienda a cero.

Ejemplo. Evaluar el siguiente límite:

$$\lim_{x \longrightarrow 1} \frac{sen(x^2 - 1)}{x^2 - 1}.$$

Solución. En este caso se tiene que Δ tiene la forma $x^2 - 1$. Para que este límite se ajuste al límite fundamental trigonométrico se debe tiener que

$$x^2 - 1 \longrightarrow 0.$$

Puesto que $x \longrightarrow 1$ se tiene que $x^2 - 1 \longrightarrow 0$, y por tanto, aplicando el límite fundamental triogonométrico,

$$\lim_{x \longrightarrow 1} \frac{sen(x^2-1)}{x^2-1} = 1.$$

2.1.1 Propiedades de los límites

Las propiedades que se mencionan a continuación son de gran utilidad para el desarrollo de la teoría de límites; nosotros las enunciamos en esta parte solamente para conocimiento general de las propiedades que rigen el comportamiento de los límites.

1. $\lim_{x \longrightarrow x_0} \big(f(x) + g(x)\big) = \lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \longrightarrow x_0} g(x).$

2. $\lim_{x \longrightarrow x_0} \big(\lambda f(x)\big) = \lambda \lim_{x \longrightarrow x_0} f(x)$, para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$.

3. $\lim_{x \longrightarrow x_0} \big(f(x) \cdot g(x)\big) = \lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \longrightarrow x_0} g(x).$

4. $\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)}$, siempre que $\lim_{x \longrightarrow x_0} g(x) \neq 0$.

5. $\lim_{x \longrightarrow x_0} \big(f(x)\big)^n = \left(\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x)\right)^n.$

6. $\lim_{x \longrightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x)}$, siempre que $\sqrt[n]{f(x)}$ tenga sentido.

A partir de estas propiedades se pueden, por ejemplo, calcular los siguientes límites:

a.

$$\lim_{x \to 1}(2x+3)(x^2-2) =$$
$$= \lim_{x \to 1}(2x+3) \cdot \lim_{x \to 1}(x^2-2)$$
$$= \left(\lim_{x \to 1} 2x + \lim_{x \to 1} 3\right) \cdot \left(\lim_{x \to 1} x^2 - \lim_{x \to 1} 2\right)$$
$$= (2(1)+3) \cdot (1^2-2)$$
$$= 5(-1)$$
$$= -5$$

b.

$$\lim_{x \to -1}\left(\frac{x^2-3x+2}{2x+1}\right) =$$
$$= \frac{\lim_{x \to -1}(x^2-3x+2)}{\lim_{x \to -1}(2x+1)}$$
$$= \frac{\lim_{x \to -1}(x^2) - \lim_{x \to -1}(3x) + \lim_{x \to -1}(2)}{\lim_{x \to -1}(2x) + \lim_{x \to -1}(1)}$$
$$= \frac{(-1)^2-3(-1)+2}{2(-1)+1}$$
$$= \frac{6}{-1}$$
$$= -6$$

c.

$$\lim_{x \to 0} \sqrt[3]{x^2+8} =$$
$$= \sqrt[3]{\lim_{x \to 0}(x^2+8)}$$
$$= \sqrt[3]{\lim_{x \to 0}(x^2) + \lim_{x \to 0}(8)}$$
$$= \sqrt[3]{0^2+8}$$
$$= \sqrt[3]{8} = 2$$

d.

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$$

En el caso se tiene que $\lim_{x \to 1}(\sqrt{x}-1) = 0$ y $\lim_{x \to 1}(x-1) = 0$, por tanto, reemplazando directamente el valor de x por 1, obtenemos un límite de la forma indeterminada $\frac{0}{0}$. Para levantar la forma indeterminada procedemos de la siguiente manera (lo que hacemos es racionalizar el numerador).

$$\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} =$$
$$= \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$= \frac{x-1}{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}+1}$$

Por tanto:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{1}{\sqrt{x}+1}$$

$$= \frac{\lim_{x \to 1}(1)}{\lim_{x \to 1}\left(\sqrt{x}+1\right)}$$

$$= \frac{1}{\lim_{x \to 1}\left(\sqrt{x}\right) + \lim_{x \to 1}(1)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\lim_{x \to 1}(x)}+1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1}+1}$$

$$= \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

Nota: *Los límites que estudiaremos ahora tienen la forma* $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. *Si reemplazamos directamente el valor de h por cero siempre obtenemos la forma indeterminada* $\frac{0}{0}$. *Para levantar esta forma indeterminada lo que se hace* *es, en la práctica, buscar una forma equivalente de la expresión* $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ *(ver el ejemplo d del bloque anterior).*

Ejemplo. Sea $f(x) = x^3$. Calcular $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Solución.

$$\begin{aligned}
&\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \\
&= \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \\
&= \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} \\
&= \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} \\
&= \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2)}{h} \\
&= 3x^2 + 3xh + h^2
\end{aligned}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned}
&\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \\
&= \lim_{h \to 0} (3x^2 + 3xh + h^2) \\
&= 3x^2 + 3x(0) + 0^2 \\
&= 3x^2
\end{aligned}$$

2.1.2 Aplicación de los límites

La teoría de límites resulta útil al estudiar fenómenos financieros como los que se muestran en el siguiente ejemplo:

Ejemplo.

a. El costo de fabricar una cierta cinta de vídeo es

$$c(x) = 20000 + 5x.$$

Donde x es el número de cintas fabricadas. El costo promedio por cinta, denotado por $\overline{c(x)}$, se encuentra dividiendo $c(x)$ entre x. Encuentre $\lim_{x \to 10000} \overline{c(x)}$.

Solución. En este caso se tiene que:

$$\lim_{x \to 10000} \overline{c(x)} = \lim_{x \to 10000} \frac{20000 + 5x}{x} = \frac{20000 + 5(10000)}{10000} = 7.$$

b. El programa de capacitación de una compañía ha determinado que un empleado nuevo puede hacer un promedio de $P(s)$ piezas de trabajo por día después de s días de capacitación, donde $P(s) = \frac{90s}{s+6}$. Encuentre $\lim_{s \to 11} P(s)$.

Solución. En este caso se tiene que:

$$\lim_{s \to 11} P(s) = \lim_{s \to 11} \frac{90s}{s+6} = 58.235.$$

c. Las ventas semanales (en dólares) en una tienda, x semanas después del término de una campaña publicitaria, están dadas por

$$S(x) = 500 + \frac{3600}{x+2}.$$

Halle $\lim_{x \to 16} S(x)$.

Solución. Para este ejemplo se tiene que:

$$\lim_{x \to 16} S(x) = \lim_{x \to 16} \left(500 + \frac{3600}{x+2}\right) = 700.$$

Nota: *La teoría de límites, como es natural, se la puede aplicar a un ámbito mucho más grande que los mostrados en el ejemplo anterior. Por ejemplo, existen aplicaciones a las ciencias naturales, a la química, a la física, etc. Nosotros no abordamos estas aplicaciones porque quedan fuera del interés de este texto.*

2.2 Razones de cambio

Una de las principales aplicaciones del cálculo es determinar cómo una variable cambia en relación con otra. Por ejemplo, un hombre de negocios quiere saber cómo cambian las ganancias con respecto a la publicidad, mientras que un médico quiere saber cómo reacciona un paciente frente a un cambio en la dosis de un medicamento.

Comenzamos este tema con una situación familiar. Un comerciante observa que su negocio comienza a dar utilidades a partir de $x = 8$ donde x es el número de productos vendidos (en cientos). La siguiente tabla muestra como es esta utilidad para distintos valores de x:

Tabla 2.1 Utilidades por el número de productos vendidos

Número de productos vendidos	8	10	12	14	15	20	40
Utilidad	0	20	48	84	105	240	1280

Fuente: LIAL, HUNGERFORD. Matemáticas para administración y economía. Séptima edición. Pearson 2000

Si f es la función cuya regla es

$$f(x) = \text{utilidad multiplicada por el número de productos vendidos } x,$$

entonces la Tabla 2.1 muestra que $f(10) = 20$ y $f(15) = 105$. La utilidad obtenida de $x = 10$ a $x = 15$ es $105 - 20$, es decir, $f(15) - f(10)$. De similar manera obtenemos las demás entradas en la siguiente tabla.

Tabla 2.2 Utliad por cada incremento de productos vendicos

Incremento de productos vendidos	Utilidad
$x = 10$ a $x = 14$	$f(14) - f(10) = 84 - 20 = 64$
$x = 8$ a $x = 15$	$f(15) - f(8) = 105 - 0 = 105$
$x = 12$ a $x = 20$	$f(20) - f(12) = 240 - 48 = 192$
$x = 10$ a $x = 40$	$f(40) - f(10) = 1280 - 20 = 1260$
$x = 14$ a $x = 40$	$f(40) - f(14) = 1280 - 84 = 1196$
$x = a$ a $x = b$	$f(b) - f(a)$

Fuente: Autores

La última fila muestra cómo obtener la utilidad para cualquier diferencia de valores de x $(8 \leq a < b \leq 40)$.

Se define la razón de cambio promedio de la utilidad o utilidad promedio como la razón de cambio de la utilidad respecto al número de productos vendidos, es decir:

$$\text{utilidad promedio} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Nota. *Lo que se hizo con la función utilidad puede hacerse con cualquier función.*

Ejemplo. Si $f(x) = x^2 + 4x + 5$, encuentre la razón de cambio promedio de $f(x)$ con respecto a x conforme x cambia de -2 a 3.

Solución. Para hallar la razón de cambio promedio se tiene que calcular $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ con $a = -2$ y $b = 3$. Par este ejemplo se tiene que:

$$\frac{f(3) - f(-2)}{3—2} = \frac{26 - 1}{5}$$
$$= \frac{25}{5} = 5$$

Nota. *Es habitual denotar el incremento de una cantidad y desde un valor de y_1 a un valor de y_2 como Δy, es decir $\Delta y = y_2 - y_1$.*

Con esta notación se tiene que:

$$\text{razón de cambio promedio de } f = \Delta f = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Ejemplo. El volumen de ventas de gasolina de cierta estación de servicio depende del precio por litro. Si p es el precio por litro de gasolina en centavos, se encuentra que el volumen de ventas q (en litros por día) está dado por

$$q = 500(150 - p).$$

Calcule la razón de cambio promedio del volumen de ventas correspondiente a un incremento en el precio de 120 ¢ a 1130 ¢

Solución. Aquí, p es la variable independiente y q es una función de p. El primer valor de p es $p_1 = 120$ y en segundo valor es $p_2 = 130$. Luego, el incremento de p es

$$\Delta p = p_2 - p_1 = 130 - 120 = 10.$$

El incremento en q es

$$\begin{aligned}
&\Delta q = q_2 - q_1 \\
&= 500(150 - p_1) - 500(150 - p_2) \\
&= 500(150 - 120) - 500(150 - 130) \\
&= 15000 - 10000 = -5000.
\end{aligned}$$

Por tanto, la razón de cambio promedio en el volumen de ventas es:

$$\frac{\Delta q}{\Delta p} = \frac{-5000}{10} = -500$$

Nota. *El ejemplo anterior muestra que el volumen de ventas decrece en un promedio de 500 litros por día cuando el precio se incrementa en 10 ¢ el litro.*

2.3 Razón de cambio instantáneo

En situaciones reales, una variable sólo toma valores discretos, lo cual significa que los incrementos de ésta solo pueden medirse en intervalos de longitud diferente de cero. Sin embargo, la información que proporciona la razón de cambio promedio $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, cuando el valor de a se acerca mucho al de b, es de vital importancia para aplicaciones posteriores.

Para hallar la razón de cambio promedio en estas situaciones se tiene que calcular el siguiente límite:

$$\lim_{a \longrightarrow b} \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \lim_{\Delta a \longrightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta a}$$

Notas. *El límite* $\lim_{\Delta a \longrightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta a}$ *calcula la razón de cambio instantáneo de* f *en* a *o simplemente el cambio instantáneo de* f *en* a.

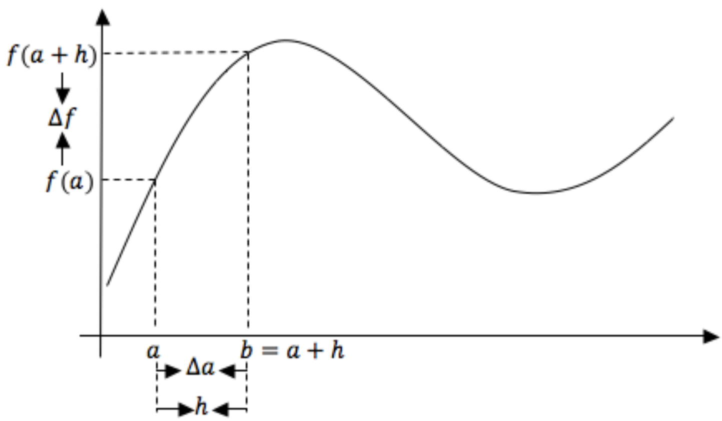


Figura 0.4. Gráfico de la razón de cambio instantaneo.

La Figura 2.4 muestra que la razón de cambio instantáneo se puede expresar de la siguiente manera:

$$\lim_{a \longrightarrow b} \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Es esta forma la que se utiliza con mayor frecuencia para calcular la razón de cambiuo instantaneo en a.

Ejemplo. Una compañía determina que el costo (en cientos de dólares) de fabricar x unidades de un cierto artículo es:

$$C(x) = -0.2x^2 + 8x + 40.$$

Halle la razón de cambio instantáneo cuando se fabrican 5 artículos.

Solución. Lo primero que hacemos para hallar la solución de este ejemplo es calcular $\frac{C(x+h)-C(X)}{j}$.

$$\begin{aligned}
&\frac{C(x+h) - C(x)}{h} = \\
&= \frac{-0.2(x+h)^2 + 8(x+h) + 40 - (-0.2x^2 + 8x + 40)}{h} \\
&= \frac{-0.2x^2 - 0.4xh - 0.2h^2 + 8x + 8h + 40 + 0.2x^2 - 8x - 40}{h} \\
&= \frac{-0.4xh - 0.2h^2 + 8h}{h} \\
&= -0.4x - 0.2h + 8
\end{aligned}$$

Puesto que se desea calcular la razón de cambio instantáneo del costo C cuando $x = 5$ se tiene que $\frac{C(5+h)-C(5)}{h} = -0.4(5) - 0.2h + 8 = 6 - 0.2h$. Por último, la razón de cambio instantáneo será el límite cuando h tiende a cero, es decir:

$$\text{razón de cambio instantáneo} = \lim_{h \to 0}(6 - 0.2h) = 6.$$

Esto significa que cuando se fabrican 5 artículos, el costo está creciendo a razón de $600 por artículo.

2.4 Continuidad

Sea $f(x)$ una función, se dice que ésta es continua en x_0 cuando

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Intuitivamente, una función es continua en x_0 si al realizar el trazado de la curva $y = f(x)$ no se necesita levantar el lápiz al pasar por x_0.

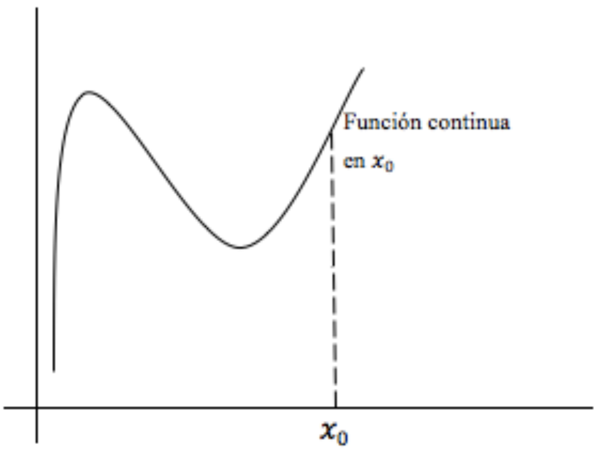


Figura 0.5. Gráfico de una función continua en x_0.

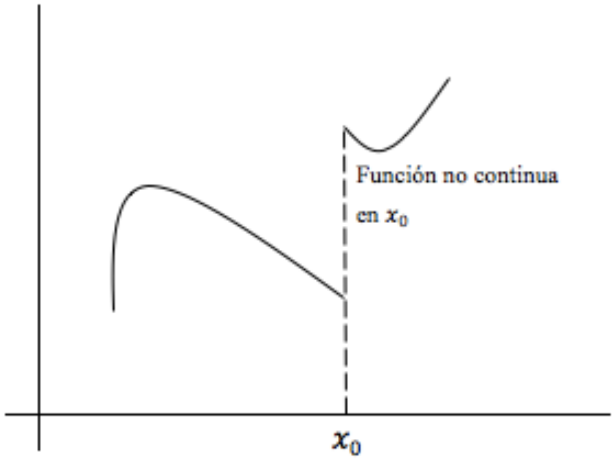


Figura 0.6. Gráfico de una función discontinua en x_0.

El estudio de la continuidad de una función en un punto resulta de gran importancia teórica, pues es este concepto el que permite desarrollar, de forma adecuada, la idea de derivación; tema que será tratado en el siguiente capítulo.

Nota. Se puede notar que:

1. *La continuidad dá el fundamento teórico a la teoría de la derivación. Sin embargo, en las aplicaciones que se pueden hacer a la administración y economía este concepto teórico tan importante se lo puede pasar por alto, pues las funciones que aparecen en dichas aplicaciones son de echo continuas. Por esta razón, en este texto solamente se realizan algunos ejemplos con la intención de mostrar cual es el mecanismo operativo que se utiliza para averiguar si una función es continua en un punto dado.*

2. *Para que una función sea continua en x_0 se tiene que cumplir primero que x_0 pertenezca al dominio de f, pues es necesario realizar el cálculo de $f(x_0)$.*

Ejemplo. Averiguar si las siguientes funciones son continuas en el punto indicado

1. $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$ en $x_0 = 0$

2. $f(x) = x^2 + 5x - 10$ en $x_0 = 2$

3. $f(x) = \sqrt{x^2 + 5x - 10}$ en $x_0 = 0$

4. $f(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$ en $x_0 = 1$

Solución. Para probar que esta función es continua se tiene que ver si se cumple que $\lim_{x \longrightarrow 0} f(x) = f(0)$.

1. Calculamos por separado $\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{x+1}{x^2+1}$ y $f(0)$.

   - $\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{x+1}{x^2+1} = 1$

   - $f(0) = \frac{0+1}{0^2+1} = 1$

Como $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$, la función definida por $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$ es continua en $x_0 = 0$

2. $\lim_{x \to 2} (x^2 + 5x - 10) = 4$ y $f(2) = 2^2 + 5(2) - 10 = 4$. Luego, la función es continua en $x_0 = 2$

3. En este ejemplo se tiene que $x_0 = 0$ no pertenece al dominio de f, por tanto, f no puede ser continua en $x_0 = 0$

4. Para este caso, igual que el ejemplo anterior, la función pierde continuidad pues $x_0 = 1$ no pertenece al dominio de f.

Ejercicios del capítulo 2

1. Calcular los siguientes límites:

   - $\lim_{x \to 2} \sqrt{\frac{x^2+2x+3}{x^2+5}}$
   - $\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$
   - $\lim_{x \to 1} \frac{1-x}{1-\sqrt{x}}$

2. El costo de fabricar un producto es $c(x) = 5x^2 + 3x - 2$; donde x es el número de productos fabricados. Encuentre:

$$\lim_{x \to 100} \overline{c(x)},$$

donde $\overline{c(x)}$ es el costo promedio.

3. Una compañía especializada en lanzar productos al mercado ha determinado que la aceptación de cierto producto está determinado por la ley $A(t)$ donde t representa el número de días de haber sido introducido el producto al mercado. Si

$$A(t) = \frac{90t^2 - 5t + 4}{t - 7},$$

encuentre $\lim_{t \to 120} A(t)$. Interprete el resultado.

4. Las ventas semanales (en dólares) en una tienda, x días después del término de una campaña publicitaria, están dadas por:

$$S(x) = 5000 + \frac{3600}{x^3 - 7x^2 + 2x - 1}$$

Halle $\lim_{x \to 150} S(x)$. Interprete el resultado.

5. Se sabe que el costo de producir x unidades de un producto está dado por:

$$G(x) = 300 + \frac{5}{x + 1}$$

Calcule la razón de costo promedio cuando el número de artículos se incrementa de 50 a 120 artículos. Interprete el resultado.

6. Cuando el precio de cierto artículo es igual a p, el número de artículos que pueden venderse por semana está dado por la fórmula

$$x = \frac{100}{\sqrt{p+1}}$$

Determine la razón de cambio de la demanda cuando el precio se incrementa de \$1 a \$2.25

7. Con relación a la función de demanda del ejercicio 6, calcule el incremento instantáneo de la demanda cuando el precio es.
   - \$1.
   - \$2.25.

   Que puede concluir con relación al resultado del ejercicio 6.

8. El ingreso semanal total R (en dólares) obtenido por la producción y venta de x unidades de cierto artículo está dado por:

$$R = 500x - 2x^2.$$

Determine el ingreso instantáneo cuando se producen y venden 30 unidades.

Cápitulo 3

Derivación

La palabra cálculo, como otras palabras en matemática, incluyendo la propia palabra matemática[6], no son de significado matemático en su origen.

El cálculo, del latín “calculus”, guijarro, se asocia a las matemáticas porque los griegos y los romanos utilizaban las piedras para ayudarse a realizar las operaciones aritméticas. Hoy día, la palabra cálculo, sin más calificativos, significa en matemáticas cálculo diferencial e integral, cuya naturaleza vamos a estudiar en este capítulo.

El cálculo es la aportación de muchos hombres. Aunque Isaac Newton (1642 – 1727) y Gottfried van Leibniz (1642 – 1716) son considerados como sus fundadores, fueron los trabajos de matemáticos anteriores, incluyendo a los lejanos en el tiempo Arquímides y Eudoxo, los que les permitieron hacer sus descubrimientos. Ni Newton ni Leibniz se percataron de la importancia de cuanto habían averiguado. Fueron los matemáticos A. I. Cauchy (1789 – 1857) y G. F. Riemann (1826 – 1866) los que establecieron una base teórica firme para el cálculo.

Desde que Copérnico realizó sus observaciones astronómicas se entendió que todo el universo se encuentra en constante cambio; algunas cosas cambian rápidamente mientras que otras no. Se sabe, por ejemplo, que las plantas crecen y por eso varía su tamaño, aunque muy lentamente; los picaflores cuando vuelan, mueven sus alas con tanta rapidez que es imposible seguirlos con la

[6] Del griego mathema, conocimiento

vista; la velocidad con que corre una persona es un ejemplo intermedio, su velocidad se puede calcular fácilmente.

Este capítulo trata de los cambios y, en particular, de la razón de cambio de las cosas y está dedicado a buscar aplicaciones de este concepto a la administración y economía

3.1 Un problema que lleva al concepto de derivada

Los problemas que llevaron a los matemáticos al concepto de derivada son principalmente de carácter geométrico (hallar la pendiente de la recta tangente a una curva dada) y mecánico (hallar la velocidad de un cuerpo). No obstante, nosotros abordamos el tema de la derivada con el siguiente ejemplo[7]:

Ejemplo. Un fabricante de relojes puede producir un cierto reloj a un costo unitario de $15. Se estima que si el precio unitario de reloj es x, entonces el número de relojes vendidos por semana es $125 - x$.

a. Expresar el monto de las utilidades semanales del fabricante como función de x.

b. ¿Cómo se debe determinar el precio unitario de cada reloj para que la utilidad sea máxima?

Solución.

[7] A pesar de que aquí utilizamos un ejemplo relacionado con la administración, no podemos dejar a un lado el carácter geométrico que implica la solución (literal b) del ejemplo.

a. Las utilidades pueden obtenerse restando el costo total (semanal) del ingreso total (semanal). Sea R el ingreso semanal. Como el ingreso es el producto del costo de cada reloj y el número de relojes vendidos, se tiene que $R = x(125 - x)$. Sea C el costo total de los relojes vendidos cada semana. Ya que el costo total es el producto del costo de cada reloj y el número de relojes vendidos se tiene que $C = 15(125 - x)$. Finalmente, sea $P(x)$ la utilidad semanal, entonces:

$$\begin{aligned} P(x) &= R - C \\ &= x(125 - x) - 15(125 - x) \\ &= (125 - x)(x - 15) \end{aligned}$$

b. Obsérvese que, a partir de la última expresión para $P(x)$ se puede calcular $P(15) = 0$ y $P(125) = 0$, y que $P(x) > 0$ cuando x está en el intervalo $]15,125[$

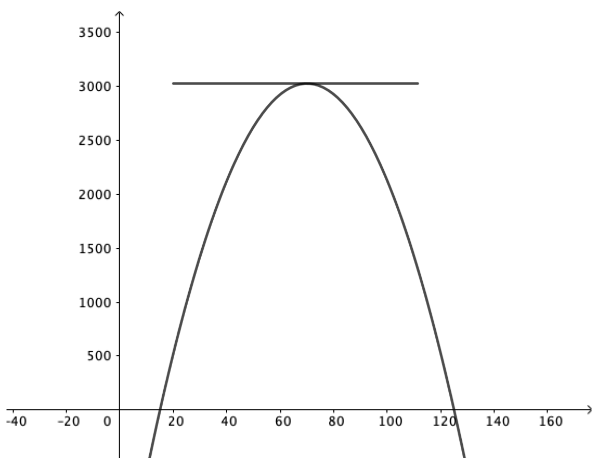


Figura 0.1. Gráfico de una función con máximo relativo.

Desde la figura 3.1 está claro que si $P(x)$ debe tener un valor máximo, éste debe ocurrir en algún número contenido en el intervalo abierto $]15,125[$. En parágrafos posteriores se aprenderá que si una función tiene un valor máximo, entonces debe ocurrir en un punto donde la recta tangente es horizontal, es decir, en un punto donde la pendiente de la recta tangente es cero. Por lo tanto, puede determinarse el valor de x que da un valor máximo de $P(x)$ si se tiene un método para calcular la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función P.

Nota. *Para lograr este objetivo primero consideramos cómo definir una recta tangente a una curva en un punto dado.*

Intuitivamente, una recta tangente a una curva en un punto P es aquella recta que corta a la curva solamente en P. Esta idea no basta para una curva en general. Las siguientes figuras muestran esta ocurrencia:

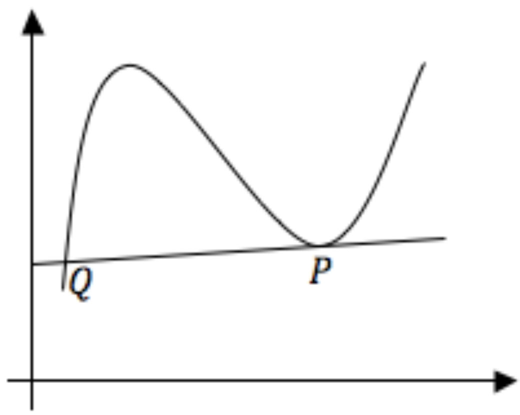


Figura 0.2. Gráfico de la reca tangente a la curva en el punto ***P***.

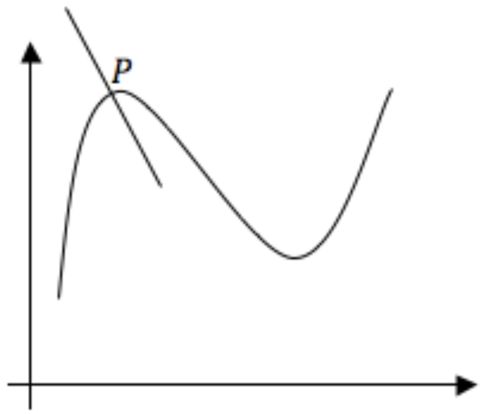


Figura 0.3. Gráfico de una recta secante a la curva en el punto ***P***.

En la primer figura se observa que la recta corta a la curva en el punto P, sin embargo, prolongándola lo suficiente, esta también corta a la curva en el punto Q. En el segundo gráfico, pocos estarán dispuestos a decir que la recta es tangente a la curva en el punto P, a pesar que ésta la corta única,mente en P.

Para precisar el concepto de recta tangente y obtener una definición general de tangente, se empieza por considerar rectas secantes y se utiliza la definición de límite[8]. Procedemos como se hace frecuentemente en matemática. Suponiendo que se sabe que es una recta tangente a una curva, se desea calcular la pendiente de esta recta en el punto de tangencia. Es decir, dada la función f tal que $x \longmapsto f(x)$ y un punto $P\big(x_0, f(x_0)\big)$, se desea calcular la pendiente de la tangente L al gráfico de la función f en el punto P (ver figura 3.4).

[8] La definición precisa de recta tangente a una curva en un punto cae fuera del alcance de este texto. Sin embargo, la idea que introducimos es suficiente para dar fundamento al discurso que sigue después.

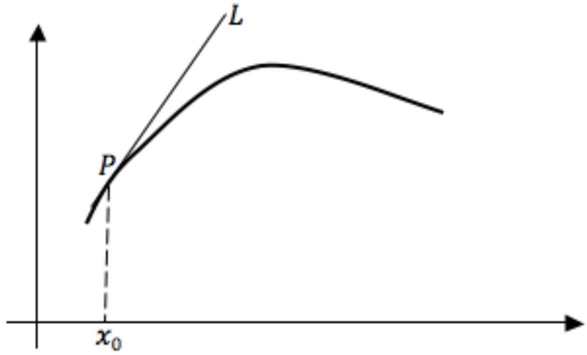


Figura 0.4. Gráfico de la recta tangente a la grafica de $\boldsymbol{f}$ en el punto $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0}))$.

La dificultad consiste en que se conoce solamente un punto P, mientras que para calcular la pendiente se necesitan dos puntos. Por esto se escoge otro punto $Q(x_1, f(x_1))$ sobre la curva, cercano a P. Entonces, la pendiente m de la secante L, que une P y Q, se puede calcular (ver Figura 3.5) como

$$\text{pendiente de } L = \frac{\overline{QR}}{\overline{PR}} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Además,

$$tan(\alpha) = m_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Este número, se denomina el coeficiente de diferencias de f en x_0 para la diferencia h.

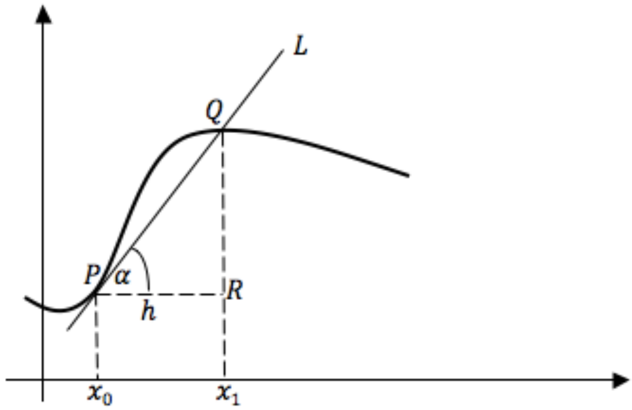


Figura 0.5. Recta secante que pasa por los puntos $\boldsymbol{P}$ y $\boldsymbol{Q}$.

Si Q está próximo a P, lo que significa que h es pequeño, se obtiene una aproximación de m. Cuando el punto Q tiende, a través de la curva al punto P, la recta secante L_1 tiene por posición límite a la recta tangente L (ver Figura 3.6). Por tanto, para calcular la pendiente de la recta L se determina la pendiente de la secante L_1 y se halla el límite cuando $h \longrightarrow 0$. Lo anterior está ilustrado en la figura 3.6.

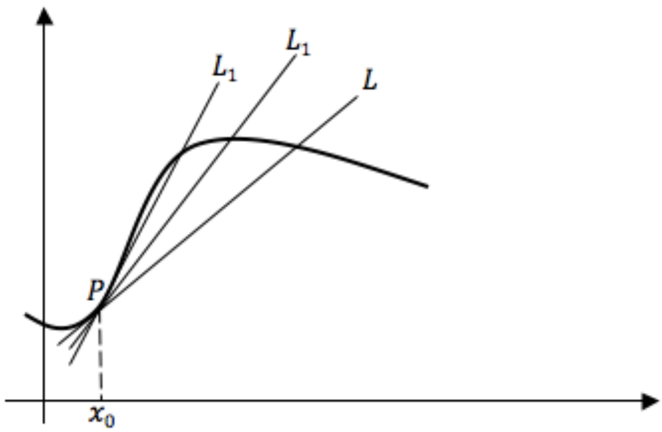


Figura 0.6. Recta tangente como límite de rectas secantes.

Así, la pendiente de la recta tangente al gráfico de f en el punto P tiene pendiente pendiente igiual a

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

3.2 Definición de derivada

La derivada de una función f es la función, denotada por f' (léase f prima), definida por:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}.$$

Siempre que este límite exista.

Si $f'(x)$ puede encontrarse, se dice que f es diferenciable en x y $f'(x)$ se llama la derivada de f en x, o la derivada de f con respecto a x. El proceso de encontrar la derivada se llama derivación.

Otra notación para la derivada de f en x es $\frac{df(x)}{dx}$ utilizada por Leibniz por la utilidad operativa que presenta, sobre este tema se hablará en parágrafos posteriores.

Nota. *Si comparamos el cálculo de la pendiente de la recta tangente al gráfico de una curva, calculado en el parágrafo anterior, y la definición de la derivada de una función f vemos que coinciden; por tanto, la derivada de una función f*

en x_0 *calcula la pendiente de la recta tangente al gráfico de la curva* $y = f(x)$ *en el punto* $(x_0, f(x_0))$.

En el ejemplo de la página 102, literal b, se pidió un procedimiento para averiguar cuál debe ser el precio unitario de cada reloj para que la utilidad $P(x) = (125 - x)(x - 15)$ sea máxima. Ahora sabemos que este proceso consiste en calcular la derivada de $P(x)$ y luego ver para que valor de x se tiene que $P'(x) = 0$.

Nota. *El proceso exacto para saber que* $P'(x) = 0$ *genera un máximo es un poco más complicado de lo que se dice aquí, sobre este tema se volverá en parágrafos posteriores.*

3.2.1. Ejemplos de cálculo de derivadas a partir de la definición

Puesto que el cálculo de la derivada de una función involucra calcular el límite del coeficiente de diferencias de f en x, se recomienda seguir los siguientes pasos:

Paso 1: Encontrar $f(x + h)$.

Paso 2: Encontrar $f(x + h) - f(x)$.

Paso 3: Dividir $f(x + h) - f(x)$ para h para obtener el coeficiente de diferencias de f en x, esto es, $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Paso 4: Hallar el límite (si existe) del coeficiente de diferencias de f en x para obtener $f'(x)$.

Ejemplo. Hallar la derivada de las siguientes funciones:

a. $f(x) = x^3 - 4x$

b. $f(x) = \frac{1}{x}$

c. $f(x) = \sqrt{x}$

d. $f(x) = sen(x)$

e. $f(x) = cos(x)$

f. $f(x) = log_a(x)$

Solución. Para calcular la derivada de las funciones que se proponen como ejemplos seguimos, como es natural, los pasos que se recomienda arriba; en la resolución de los últimos ejemplos no especificamos explícitamente estos pasos con la intención de que el lector se vaya familiarizando con el proceso en forma directa.

a. $f(x) = x^3 - 4x$

Paso 1:

$$f(x+h) = (x+h)^3 - 4(x+h)$$
$$= x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - 4x - 4h$$

Paso 2:

$$f(x+h)-f(x)=x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-4x-4h-x^3+4x$$
$$=3x^2h+3xh^2+h^3-4h=h(3x^2+3xh+h^2-4)$$

Paso 3:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{h(3x^2+3xh+h^2-4)}{h}$$
$$=3x^2+3xh+h^2-4$$

Paso 4:

$$(x^3-4x)'=f'(x)$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2-4)$$
$$=3x^2-4$$

b. $f(x)=\frac{1}{x}$

Paso 1:

$$f(x+h)=\frac{1}{x+h}$$

Paso 2:

$$f(x+h)-f(x)=\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}$$

$$= \frac{x - x - h}{(x + h)x}$$

$$= -\frac{h}{(x + h)x}$$

Paso 3:

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \frac{-\frac{h}{(x + h)x}}{h}$$

$$= -\frac{1}{(x + h)x}$$

Paso 4:

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = f'(x)$$

$$= \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \longrightarrow 0} \left(-\frac{1}{(x + h)x}\right)$$

$$= -\frac{1}{x^2}$$

c. $f(x) = \sqrt{x}$

Paso 1:

$$f(x + h) = \sqrt{x + h}$$

Paso 2:

$$f(x+h)-f(x)=\sqrt{x+h}-\sqrt{x}$$

Paso 3:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$$

Paso 4:

$$\begin{aligned}
&\left(\sqrt{x}\right)'=f(x)\\
&=\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\
&=\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}
\end{aligned}$$

El cálculo directo de este límite nos lleva a la forma indeterminada $\frac{0}{0}$. Primero buscamos una manera equivalente de expresar $\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$.

$$\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\left(\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\right)\left(\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}\right)\\
&=\frac{x+h-x}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}\\
&=\frac{h}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}\\
&=\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

Por tanto

$$
\begin{aligned}
\left(\sqrt{x}\right)' &= f'(x) \\
&= \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} \\
&= \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x}}
\end{aligned}
$$

d. $f(x) = sen(x)$. Para desarrollar este ejemplo (y el siguiente) necesitamos las siguientes identidades trigonométricas:

1. $sen^2(\alpha) + cos^2(\alpha) = 1$
2. $sen(\alpha + \beta) = sen(\alpha)cos(\beta) + sen(\beta)cos(\alpha)$
3. $cos(\alpha + \beta) = cos(\alpha)cos(\beta) - sen(\beta)sen(\alpha)$

Además, utilizaremos el límite fundamental trigonométrico $\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{sen(x)}{x} = 1$.

Se tiene que:

$$
\begin{aligned}
f(x+h) - f(x) &= sen(x+h) - sen(x) \\
&= sen(x)cos(h) + sen(h)cos(x) - sen(x)
\end{aligned}
$$

$$= sen(x)(cos(h) - 1) + sen(h)cos(x)$$

Por tanto $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{sen(x)(cos(h)-1)+sen(h)cos(x)}{h}$, lo que nos falta calcular es el límite cuando $h \to 0$. Si realizamos el cálculo directo obtenemos la forma indeterminada $\frac{0}{0}$, buscamos entonces una forma equivalente de la expresión $\frac{sen(x)(cos(h)-1)+sen(h)cos(x)}{h}$.

$$\frac{sen(x)(cos(h) - 1) + sen(h)cos(x)}{h}$$

$$= \frac{sen(x)(cos(h) - 1)}{h} + \frac{sen(h)cos(x)}{h}$$

$$= \frac{sen(x)(cos(h) - 1)}{h}\left(\frac{cos(h) + 1}{cos(h) + 1}\right) + \frac{sen(h)cos(x)}{h}$$

$$= \frac{sen(x)(cos^2(h) - 1)}{h(cos(h) + 1)} + \frac{sen(h)cos(x)}{h}$$

$$= \frac{sen(x)sen^2(h)}{h(cos(h) + 1)} + \frac{sen(h)cos(x)}{h}$$

$$= \frac{sen(x)sen(h)sen(h)}{h(cos(h) + 1)} + \frac{sen(h)cos(x)}{h}$$

$$= \frac{sen(h)sen(x)}{cos(h) + 1}\left(\frac{sen(h)}{h}\right) + \frac{sen(h)cos(x)}{h}$$

$$= \frac{sen(h)sen(x)}{cos(h)+1}\left(\frac{sen(h)}{h}\right) + cos(x)\left(\frac{sen(h)}{h}\right)$$

Por tanto:

$$\begin{aligned}
&\big(sen(x)\big)' = f'(x) \\
&= \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \longrightarrow 0} \left(\frac{sen(h)sen(x)}{cos(h)+1}\left(\frac{sen(h)}{h}\right) + cos(x)\left(\frac{sen(h)}{h}\right)\right) \\
&= cos(x)
\end{aligned}$$

e. $f(x) = cos(x)$.

$$\begin{aligned}
&f(x+h) - f(x) = cos(x+h) - cos(x) \\
&= cos(x)cos(h) - sen(x)sen(h) - cos(x) \\
&= cos(x)(cos(h) - 1) - sen(x)sen(h)
\end{aligned}$$

Por tanto

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{cos(x)(cos(h)-1) - sen(h)sen(x)}{h},$$

solo falta calcular es el límite cuando $h \to 0$. Como antes, el cálculo directo genera la forma indeterminada $\frac{0}{0}$, buscamos por tanto una forma equivalente de la expresión

$$\frac{cos(x)(cos(h)-1)-sen(h)sen(x)}{h}$$

Realizando operaiones tenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{cos(x)(cos(h)-1)-sen(h)sen(x)}{h} \\
&= \frac{cos(x)(cos(h)-1)}{h}-\frac{sen(h)sen(x)}{h} \\
&= \frac{cos(x)(cos(h)-1)}{h}\left(\frac{cos(h)+1}{cos(h)+1}\right)-\frac{sen(h)sen(x)}{h} \\
&= \frac{cos(x)(cos^2(h)-1)}{h(cos(h)+1)}-\frac{sen(h)sen(x)}{h} \\
&= \frac{cos(x)sen^2(h)}{h(cos(h)+1)}-\frac{sen(h)sen(x)}{h} \\
&= \frac{cos(x)sen(h)sen(h)}{h(cos(h)+1)}-\frac{sen(h)sen(x)}{h} \\
&= \frac{cos(x)sen(h)}{cos(h)+1}\left(\frac{sen(h)}{h}\right)-\frac{sen(h)sen(x)}{h} \\
&= \frac{cos(x)sen(h)}{cos(h)+1}\left(\frac{sen(h)}{h}\right)-sen(x)\left(\frac{sen(h)}{h}\right).
\end{aligned}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned}
&(cos(x))' = f'(x)\\
&= \begin{matrix} lim \\ h \longrightarrow 0 \end{matrix} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\
&= \begin{matrix} lim \\ h \longrightarrow 0 \end{matrix} \left(\frac{cos(x)sen(h)}{cos(h)+1}\left(\frac{sen(h)}{h}\right) - sen(x)\left(\frac{sen(h)}{h}\right)\right)\\
&= -sen(x)
\end{aligned}$$

f. $f(x) = log_a(x)$

$$\begin{aligned}
&\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{log_a(x+h)-log_a(x)}{h}\\
&= \frac{log_a\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h}
\end{aligned}$$

Al realizar directamente el límite cuando $h \to 0$ generamos la forma indeterminada $\frac{0}{0}$. Luego debemos buscar una forma equivalente de

$$\frac{log_a\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h}$$

Se tiene que

$$\frac{log_a\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} = \frac{x}{x}\left(\frac{log_a\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h}\right)$$

$$= \frac{1}{x}\left(\frac{x}{h}\left(log_a\left(\frac{x+h}{x}\right)\right)\right)$$

$$= \frac{1}{x} log_a\left(\frac{x+h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}$$

$$= \frac{1}{x} log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}.$$

Recordamos que el límite fundamental algebraico en su forma general asegura que $\underset{\Delta\to 0}{lim}(1+\Delta)^{\frac{1}{\Delta}} = e$, si ponemos $\Delta = \frac{h}{x}$ se tiene que $\frac{1}{\Delta} = \frac{x}{h}$. Por tanto:

$$\left(log_a(x)\right)' = f'(x)$$

$$= \underset{h\longrightarrow 0}{lim} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \underset{h\longrightarrow 0}{lim}\left(\frac{1}{x} log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right)$$

$$= \frac{1}{x} log_a(e)$$

3.3 Derivada de la función inversa

Como habíamos indicado en la Sección 1.4, la función inversa de una función $f(x) = y$ es aquella función $f^{-1}(y) = x$. Resulta importante saber cómo se halla la derivada de la función inversa[9].

[9] En realidad, la función es f y $f(x) = y$ es el valor que asume f en x; si no existe confusión, nos referiremos a la función f como $f(x)$ para hacer más ágil la exposición.

El siguiente resultado se puede hallar en cualquir texto mensionado en la bibliografía.

Sea f una función que admite función inversa, sea f^{-1} la función inversa de f. Se puede demostrar que la derivada de f^{-1} está dada por:

$$\left(f^{-1}(y)\right)' = \frac{1}{f'(x)}$$

Nota. *Se acostumbra utilizar la variable x para hacer mención a una función, es decir, escribiremos $f^{-1}(x)$ para referirnos a la derivada de la función inversa de $f(x)$.*

Ejemplo. Calcular la derivada de la función inversa en los siguientes casos:

a. $f(x) = 5x - 1$

b. $f(x) = 4x + 5$

c. $f(x) = sen(x)$

d. $f(x) = cos(x)$

e. $f(x) = log_a(x)$

Solución.

a. $f(x) = 5x - 1$, en este caso se tiene que $f^{-1}(y) = \frac{y+1}{5}$ y por tanto:

$$\left(f^{-1}(y)\right)' = \frac{1}{f'(x)}$$

$$= \frac{1}{(5x-1)'}$$

$$= \frac{1}{5}$$

Se deja como ejercicio para el lector comprobar que la derivada de $5x - 1$ es igual a 5. Con esto se tiene que: Si $f(x) = 5x - 1$, entonces $f^{-1}(x) = \frac{1}{5}$.

b. $f(x) = 4x + 5$, la función inversa de esta función es

$$f^{-1}(y) = \frac{y-5}{4}$$

luego:

$$\left(f^{-1}(y)\right)' = \frac{1}{f'(x)}$$

$$= \frac{1}{(4x+5)'}$$

$$= \frac{1}{4}$$

Con esto se tiene que: Si $f(x) = 4x + 5$, entonces $f^{-1}(x) = \frac{1}{4}$.

c. $f(x) = sen(x)$. Para la función seno no se puede proceder como hicimos en los dos ejemplos anteriores, es decir, despejar x de la expresión

$y = f(x)$ para luego calcular $f^{-1}(y)$. En este caso se define la función inversa de la función seno como la función arcoseno (denotada por $arcsen$), es decir:

Si $f(x) = sen(x) = y$, entonces $f^{-1}(y) = arcsen(y) = x$.

En consecuencia:

$$\left(arcsen(y)\right)' = \frac{1}{\left(sen(x)\right)'}$$
$$= \frac{1}{cos(x)}$$

Como $sen(x)^2 + cos(x)^2 = 1$ y $f(x) = sen(x) = y$ se tiene que:

$$cos(x) = \sqrt{1 - sen^2(x)} = \sqrt{1 - y^2}$$

Por tanto:

$$\left(arcsen(y)\right)' = \frac{1}{cos(x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

Por último, podemos escribir

$$\left(arcsen(x)\right)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

d. $f(x) = cos(x)$. Al igual que la función seno, se define la función inversa de la función coseno como la función arcocoseno (denotada por $arccos$), es decir:

Si $f(x) = cos(x) = y$ entonces $f^{-1}(y) = arccos(y) = x$.

En consecuencia:

$$\left(cos^{-1}(y)\right)' = \frac{1}{\left(cos(x)\right)'}$$
$$= \frac{1}{-sen(x)}$$
$$= -\frac{1}{sen(x)}$$

Como $sen(x)^2 + cos(x)^2 = 1$ y $f(x) = cos(x) = y$ se tiene que:

$$sen(x) = \sqrt{1 - cos^2(x)} = \sqrt{1 - y^2}$$

Por tanto:

$$\left(cos^{-1}(y)\right)' = -\frac{1}{sen(x)}$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

Por último podemos escribir

$$\left(cos^{-1}(x)\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

e. $f(x) = log_a(x)$. En la Sección 1.4 habíamos visto que la función inversa del logaritmo de base a es la función exponencial también de base a, es decir:

Si $f(x) = log_a(x) = y$, entonces $f^{-1}(y) = a^y = x$.

En consecuencia:

$$\begin{aligned}(a^y)' &= \frac{1}{\left(log_a(x)\right)'}\\ &= \frac{1}{\frac{1}{x}log_a(e)}\\ &= \frac{x}{log_a(e)}\\ &= \frac{a^y}{log_a(e)}\end{aligned}$$

Luego, simplemente escribimos

$$(a^x)' = \frac{a^x}{log_a(e)}.$$

3.4 Derivada de las funciones elementales

Revisando la teoría desarrollada en este capítulo se puede elaborar una tabla que recoja las derivadas de todas las funciones elementales, excepto la función x^n, la derivada de esta función se la puede calcular a partir de la definición de derivada[10]; en todo caso, su cálculo cae fuera de los alcances de este texto.

Tabla 3.1 Derivadas de las funciones elementales

Derivadas de las funciones elementales	
$f(x)$	$f'(x)$
x^n	nx^{n-1}
$sen(x)$	$cos(x)$
$cos(x)$	$-sen(x)$
$sen^{-1}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$cos^{-1}(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$log_a(x)$	$\frac{1}{x}log_a(e)$
a^x	$\frac{a^x}{log_a(e)}$

Fuente: Autores

[10] Se puede demostrar por inducción sobre n que $(x^n)' = nx^{n-1}$. Para aquellos lectores interesados en esta demostración se les recomienda el texto: Análisis Matemático de Jorge Lara y Jorge Arrova.

A partir de la tabla de derivadas de las funciones elementales se puede ver que:

- $\left(ln(x)\right)' = \frac{1}{x} ln(e) = \frac{1}{x}$
- $(e^x)' = \frac{e^x}{ln(x)} = e^x$

3.5 Propiedades de la derivada

Desde la definición de derivada se puede demostrar las siguientes propiedades:

1. $\left(f(x) + g(x)\right)' = f'(x) + g'(x)$.
2. $\left(f(x) - g(x)\right)' = f'(x) - g'(x)$.
3. $\left(\lambda f(x)\right)' = \lambda f'(x)$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.
4. $\left(f(x)g(x)\right)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.
5. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$, siempre que $g(x) \neq 0$.
6. $(fog)'(x) = f'\left(g(x)\right)g'(x)$.

Este grupo de propiedades nos permite calcular la derivada de una gran variedad de funciones. El primer resultado importante es el siguiente:

$$(k)' = (kx^0)'$$

$$= k(x^0)'$$
$$= k(0x^{-1})$$
$$= 0$$

Esto es, la derivada de una constante es cero

3.5.1 Ejemplos de cálculo de derivadas utilizando las propiedades

En la Sección 3.4 se vió cual es la derivada de las funciones elementales mientras que al inicio de la Sección 3.5 se enumeraron las propiedades que cumple la derivada. Ahora estamos en condiciones de calcular la derivada de funciones más complicadas. Esta subsección está dedicada al cálculo de la derivada de funciones más complejas que las elementales. Naturalmente, es sólo un grupo minúsculo de la gran cantidad de funciones que existen, pero, muestra como se debe proceder para calcular la derivada de la mayoría de funciones que aparecen en las aplicaciones de la derivada.

1º. $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + 7x - 2$. Para hallar la derivada de esta función lo primero que debemos ver es que f es la suma de $3x^3$, $2x^2$, $7x$ y -2. Se tiene entonces, aplicando la propiedad 1:

$$f'(x) = (3x^3 + 2x^2 + 7x - 2)'$$
$$= (3x^3)' + (2x^2)' + (7x)' - (2)'$$

Según la propiedad 3 se tiene que:

$$f'(x) = 3(x^3)' + 2(x^2)' + 7(x)' - 0$$

El último término es cero pues es la derivada de una constante, para terminar debemos derivar cada término que se encuentra entre paréntesis, se debe tener presente que esta derivada es solo un caso particular de la derivada de x^n:

$$f'(x) = 3(3x^2) + 2(2x) + 7(1)$$
$$= 9x^2 + 4x + 7.$$

En los ejemplos que siguen no especificamos cada paso que realizamos para calcular la derivada de la función dada. El lector debe estar atento para explicar cual propiedad se ha aplicado y también para ver que función elemental se está derivando.

2º. $f(x) = 5x^7 - 8x^5 + x^2 - 5x + 6$

$$f'(x) = (5x^7 - 8x^5 + x^2 - 5x + 6)'$$
$$= (5x^7)' - (8x^5)' + (x^2)' - (5x)' + (6)'$$
$$= 5(x^7)' - 8(x^5)' + (2x) - 5(x)' + 0$$
$$= 5(7x^6) - 8(5x^4) + 2x - 5(1)$$
$$= 35x^6 - 40x^4 + 2x - 5.$$

3º. $f(x) = 5x^3 + 8sen(x) + 4cos(x) - 3ln(x) + 6e^x$

$$f'(x) = (5x^3 + 8sen(x) + 4cos(x) - 3ln(x) + 6e^x)'$$
$$= (5x^3)' + \big(8sen(x)\big)' + \big(4cos(x)\big)' - \big(3ln(x)\big)' + (6e^x)'$$
$$= 5(x^3)' + 8\big(sen(x)\big)' + 4\big(cos(x)\big)' - 3\big(ln(x)\big)' + 6(e^x)'$$
$$= 5(3x^2) + 8\big(cos(x)\big) + 4\big(-sen(x)\big) - 3\left(\frac{1}{x}\right) + 6(e^x)$$

$$= 15x^2 + 8cos(x) - 4sen(x) - \frac{3}{x} + 6e^x.$$

4º. $f(x) = 2x^2 + 8\sqrt{x} - 4ln(x) + 5e^x$

$$f'(x) = \left(2x^2 + 8\sqrt{x} - 4ln(x) + 5e^x\right)'$$
$$= 4x + \frac{8}{2\sqrt{x}} - 4\frac{1}{x} + 5e^x$$
$$= 4x + \frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{4}{x} + 5e^x.$$

5º. $f(x) = 3x^2sen(x) + e^xcos(x)$

$$f'(x) = \left(x^2sen(x) - e^xcos(x)\right)'$$
$$= \left(x^2sen(x)\right)' - \left(e^xcos(x)\right)'$$
$$= (x^2)'\left(sen(x)\right) + (x^2)\left(sen(x)\right)' - \left((e^x)'\left(cos(x)\right) + (e^x)\left(cos(x)\right)'\right)$$
$$= 2xsen(x) + x^2cos(x) - \left(e^xcos(x) + e^x\left(-sen(x)\right)\right)$$
$$= 2xsen(x) + x^2cos(x) - \left(e^xcos(x) - e^xsen(x)\right)$$
$$= 2xsen(x) + x^2cos(x) - e^xcos(x) + e^xsen(x).$$

6º. $f(x) = \frac{7x^3+5x^2+x}{3x^2-5x}$

$$f'(x) = \left(\frac{7x^3 + 5x^2 + x}{3x^2 - 5x}\right)'$$
$$= \frac{(7x^3 + 5x^2 + x)'(3x^2 - 5x) - (7x^3 + 5x^2 + x)(3x^2 - 5x)'}{(3x^2 - 5x)^2}$$

$$=\frac{(21x^2+10x+1)(3x^2-5x)-(7x^3+5x^2+x)(6x-5)}{(3x^2-5x)^2}$$
$$=\frac{(63x^4-75x^3-47x^2-5x)-(42x^4-5x^3-19x^2-5x)}{9x^4-30x^3+25x^2}$$
$$=\frac{63x^4-75x^3-47x^2-5x-42x^4+5x^3+19x^2+5x}{9x^4-30x^3+25x^2}$$
$$=\frac{21x^4-70x^3-28x^2}{9x^4-30x^3+25x^2}.$$

7º. $f(x)=tan(x)$. En este caso se debe recordar primero que $tan(x)=\frac{sen(x)}{cos(x)}$, luego

$$f'(x)=\left(\frac{sen(x)}{cos(x)}\right)'$$
$$=\frac{\big(sen(x)\big)'\big(cos(x)\big)-\big(sen(x)\big)\big(cos(x)\big)'}{\big(cos(x)\big)^2}$$
$$=\frac{cos(x)\big(cos(x)\big)-sen(x)\big(-sen(x)\big)}{cos^2(x)}$$
$$=\frac{cos^2(x)+sen^2(x)}{cos^2(x)}$$
$$=\frac{1}{cos^2(x)}$$
$$=sec^2(x).$$

Nota: *Si* $f(x)=\frac{1}{g(x)}$ *entonces* $f'(x)=-\frac{g\prime(x)}{g^2(x)}$. *La prueba de esta propiedad se deja como ejercicio para el lector.*

8º. $f(x) = ctan(x)$. Al igual que el ejemplo anterior se tiene que $ctan(x) = \frac{1}{tan(x)}$, luego

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\frac{1}{tan(x)}\right)' \\
&= -\frac{sec^2(x)}{tan^2(x)} \\
&= -\frac{tan^2(x) + 1}{tan^2(x)} \\
&= -\left(1 + ctan^2(x)\right) \\
&= -\mathrm{csc}^2(x).
\end{aligned}
$$

Para los últimos pasos de este ejercicio, se debe recordar que: $tan^2(x) + 1 = sec^2(x)$, $ctan^2(x) + 1 = csc^2(x)$.

9º. $f(x) = sec(x)$. Al igual que antes $sec(x) = \frac{1}{cos(x)}$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\frac{1}{cos(x)}\right)' \\
&= -\frac{-sen(x)}{cos^2(x)} \\
&= \left(\frac{1}{cos(x)}\right)\left(\frac{sen(x)}{cos(x)}\right) \\
&= sec(x)tan(x).
\end{aligned}
$$

10º. $f(x) = csc(x)$. En ese caso se tiene que $csc(x) = \frac{1}{sen(x)}$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{sen(x)}\right)'$$
$$= -\frac{cos(x)}{sen^2(x)}$$
$$= -ctan(x)csc(x).$$

11º. $f(x) = \sqrt{sen(x)}$. Para hallar la derivada de f se tiene que observar primero que $f(x) = (goh)(x)$ donde las funciones f, g están definidas como $g(x) = \sqrt{x}$ y $h(x) = sen(x)$; luego de esta aclaración se tiene que:

$$f'(x) = \left(\sqrt{sen(x)}\right)'$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{sen(x)}}\big(cos(x)\big)$$
$$= \frac{cos(x)}{2\sqrt{sen(x)}}.$$

Nota. *La forma de calcular la derivada de este ejemplo resulta del hecho que* $(goh)'(x) = g'\big(h(x)\big)h'(x)$ *(ver la propiedad 6 del inicio de la Sección 3.5) y como* $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ *se tiene que*

$$g'\big(h(x)\big) = \frac{cos(x)}{2\sqrt{h(x)}} = \frac{cos(x)}{2\sqrt{sen(x)}}$$

ya que $h'(x) = cos(x)$.

12º. $f(x) = cos(e^{3x})$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(cos(e^{3x})\right)' \\ &= -sen(e^{3x})(e^{3x})(3) \\ &= -3e^{3x}sen(e^{3x}). \end{aligned}$$

Nota. *Como se observa en el cálculo de la derivada de este ejemplo, el resultado sigue el siguiente esquema:*

$$(fogoh)'(x) = \left(f\left(g\big(h(x)\big)\right)\right)' = f'\left(g\big(h(x)\big)\right)g'\big(h(x)\big)h'(x).$$

De manera más general, lo que se hace es ir derivando la función de izquierda a derecha, cada vez que se encuentre con una nueva función se pone la derivada de esa función con argumento la función o funciones que se hallan a la derecha

$$\overrightarrow{(f_1 o f_2 o f_3 o \cdots o f_n)}'(x) =$$
$$f_1'(f_2(f_3(\cdots f_n(x))))f_2'(f_3(\cdots f_n(x)))\cdots f_n'(x)$$

13º. $f(x) = cos\big(ln(x)\big)$

$$f'(x) = \left(cos\big(ln(x)\big)\right)'$$

$$= -sen\big(ln(x)\big)\frac{1}{x}$$

$$= -\frac{sen\big(ln(x)\big)}{x}$$

14º. $f(x) = ln\big(sen(x^3 + 5x^2 - 7x + 6)\big)$

$$f'(x) = \Big(ln\big(sen(x^3 + 5x^2 - 7x + 6)\big)\Big)'$$

$$= \frac{1}{\big(sen(x^3 + 5x^2 - 7x + 6)\big)} cos(x^3 + 5x^2 - 7x + 6)(3x^2 + 10x - 7)$$

15º. $f(x) = e^{sen(\sqrt{x})}$

$$f'(x) = \left(e^{sen(\sqrt{x})}\right)'$$

$$= e^{sen(\sqrt{x})} cos\left(\sqrt{x}\right) \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

3.6. Aplicaciones de la derivada. Primera parte

La teoría desarrollada hasta este momento nos permite dar las primeras aplicaciones a la administración y economía de la derivada; más precisamente definimos en esta sección lo que se conoce como costo marginal, elasticidad de costo e ingreso marginal.

3.6.1 Costo marginal

Sea $C(x)$ el valor o importe del costo total de la producción de x unidades de cierta mercancía, entonces el costo marginal cuando $x = x_1$, está definido por

$C'(x_1)$, cuando esta derivada existe. La función C' se llama función de costo marginal.

Nota. $C'(x)$ *se interpreta como el costo aproximado de la* $(x+1)-\acute{e}sima$ *unidad después de que se han producido* x *unidades.*

Ejemplo. Suponiendo que $C(x)$ es el costo total en dólares de la manufactura de x juguetes, y $C(x) = 110 + 4x + 0.02x^2$. Calcular:

a. La función de costo marginal

b. El costo marginal de producir 50 juguetes

c. El valor real de fabricación del juguete número 51

Solución.

a. La función de costo marginal está dada por $C'(x)$, luego

$$C'(x) = 4 + 0.04x$$

b. El costo marginal de producir 50 juguetes esta dado por $C'(50)$, en nuestro caso se tiene que $C'(50) = 4 + 0.04(50) = 6$

c. El valor real de fabricación del juguete número 51 esta dado por $C(51) - C(50)$, es decir 6.02

Nótese que las respuestas en los literales b y c difieren en 0.02. Esta discrepancia se produce porque el costo marginal es la razón de cambio instantáneo de $C(x)$ con respecto a un cambio unitario en x. De aquí, $C'(50)$ es el número aproximado de dólares en el costo de la producción del juguete quincuagésimo primero.

Nota. *Los economistas suelen aproximar el costo de la producción de una unidad más, utilizando la función de costo marginal pues resulta más simple calcular $C'(x)$ que $C(x+1)-C(x)$.*

3.6.2 Elasticidad de costo

Primero recordemos que el costo promedio de producción de cada unidad de una mercancía se obtiene al dividir el costo total entre el número de unidades producidas. Representando por $Q(x)$ el valor del costo promedio tenemos que $Q(x)=\frac{C(x)}{x}$, Q se llama función de costo promedio.

Sea $C(x)$ dólares el valor del costo total de producción de x unidades de un artículo y $Q(x)$ dólares el costo promedio de producción, entonces la elasticidad de costo está dada por la función k definida por $k(x)=\frac{C'(x)}{Q(x)}$.

Nota. *Si la elasticidad de costo es menor que 1, entonces el costo de producción de la siguiente unidad será menor que el costo promedio de unidades ya producidas. Si la elasticidad de costo es mayor que 1, entonces el costo promedio unitario se incrementará cuando se produce una unidad adicional.*

Ejemplo. Supóngase que $C(x)$ dólares es el costo total de producción de x marcos, y que $C(x)=50+8x-\frac{x^2}{100}$. Determinar el costo promedio, el costo marginal y la elasticidad de costo cuando $x = 60$. Dar la interpretación económica de estos resultados.

Solución. Si Q es la función de costo promedio, entonces:

$$Q(x) = \frac{C(x)}{x}$$

$$= \frac{50 + 8x - \frac{x^2}{100}}{x} = \frac{50}{x} + 8 - \frac{x}{100}$$

En consecuencia:

$$Q(60) = \frac{50}{60} + 8 - \frac{60}{100} = 0.83 + 8 - 0.6 = 8.23$$

Por lo tanto, el costo promedio de cada uno de los 60 marcos es 8.23 dólares.

La función de costo marginal es $C'(x)$.Es decir, $C'(x) = 8 - \frac{x}{50}$. De aquí:

$$C'(60) = 8 - \frac{60}{50} = 8 - 1.2 = 6.8$$

Por consiguiente, el costo aproximado de producción de la unidad número 61 es \$6.8.

La elasticidad de costo cuando $x = 60$ es $k(60)$, realizando los cálculos se tiene que:

$$k(60) = \frac{C'(60)}{Q(60)} = \frac{6.8}{8.23} = 0.83$$

Por lo tanto, el costo del marco número 61 equivale a 83 centésimos del costo promedio de las primeras 60 unidades.

3.6.3 Ingreso marginal

En la subsección 1.5.4 se afirmó que la ecuación de demanda es aquella que da la relación entre p y x, donde se demandan x unidades de un artículo cuando el precio unitario es p dólares; en efecto, se afirmó que dicha ecuación se expresa en la forma $p = f(x)$. Otra función importante en economía es la función de ingreso total, la cual se simboliza con R y está calcula como $R(x) = px$.

Si $R(x)$ es el ingreso total obtenido, cuando se tiene una demanda de x unidades de una mercancía, entonces el ingreso marginal cuando $x = x_1$ está definido por $R'(x_1)$, si la derivada existe. La función R' se llama función de ingreso marginal.

Nota. $R'(x_1)$ *puede ser positiva, negativa o cero, y puede interpretarse como la tasa de cambio del ingreso total cuando se demandan* x_1 *unidades. Así pues, como* $C'(x)$ *es el costo aproximado de la* $(k+1) - ésima$ *unidad después de que se han producido las primeras* k *unidades,* $R'(k)$ *es el ingreso aproximado de la venta de la* $(k+1) - ésima$ *unidad después de haber vendido las primeras* k *unidades.*

Ejemplo. Sea $R(x) = 300x - \frac{x^2}{2}$ el ingreso total en dólares que se obtiene por la venta de x mesas.

a. Calcular la función de ingreso marginal.

b. Calcular el ingreso marginal cuando $x = 40$.

Solución.

a. La función de ingreso marginal es $R'(x) = 300 - x$

b. El ingreso marginal cuando $x = 40$ es $R'(40) = 300 - 40 = 260$

Nota. *El ingreso real por la venta de la cuadragésima primera mesa es*

$$
\begin{aligned}
&R(41) - R(40) = \\
&= 300(41) - \frac{(41)^2}{2} - \left(300(40) - \frac{(40)^2}{2}\right) \\
&= 12300 - 840.5 - (12000 - 800) \\
&= 259.5
\end{aligned}
$$

De aquí, el ingreso real por la venta de la cuadragésima primera mesa es 259.5. En el literal b del ejemplo anterior obtuvimos $R'(40) = 260$, y \$260 es una aproximación del ingreso obtenido por la venta de dicha mesa.

Ejemplo. La ecuación de demanda de una cierta mercancía es $5x + 3p = 15$. Hallar la función de ingreso total y la de ingreso marginal.

Solución. Para hallar la función de ingreso total $R(x)$ primero debemos despegar p de la ecuación de demanda. Se tiene que $p = -\frac{5}{3}x + 5$. Por tanto la función de ingreso total es:

$$R(x) = px = -\frac{5}{3}x^2 + 5x.$$

Y la función de ingreso marginal es:

$$R'(x) = \left(-\frac{5}{3}x^2 + 5x\right)' = -\frac{10}{3}x + 5.$$

Nota. *Como x y p son no negativos se tiene que* $0 \leq x \leq 3$.

3.7 Máximos y mínimos

3.7.1 Derivadas de orden superior

Recordemos que la derivada de una función f dá como resultado una nueva función f', la cual podemos llamarla g, es decir, $f'(x) = g(x)$. Tiene sentido preguntarnos cuál será la derivada de la función g; esto es, cuál será la derivada de la derivada de la función f.

En este sentido se habla de derivadas de orden superior. Para que su definición sea más entendible es conveniente utilizar la notación de Leibniz $\frac{df(x)}{dx}$ para la derivada.

Se llama derivada de orden n o derivada de $n-$ésimo orden de la función f a la siguiente derivada:

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1} f(x)}{dx^{n-1}}\right)$$

Nota. *Con respecto a la definición de derivada de* $\mathrm{n}-\text{ésimo}$ *orden se puede decir los siguiente:*

1. *La definición de derivada de orden* n *es un ejemplo de lo que se conoce como definición recursiva, es decir, para calcular su valor es necesario conocer cuánto es su valor anterior.*

2. *Admitimos que* $\frac{d^0 f(x)}{dx^0} = f(x)$.

3. *La derivada de segundo orden es la derivada de la derivada de primer orden, la derivada de tercer orden es la derivada de la derivada de segundo orden, la derivada de cuarto orden es la derivada de la derivada de tercer orden, etc.*

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{df(x)}{dx}\right).$$

$$\frac{d^3 f(x)}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2 f(x)}{dx^2}\right).$$

$$\frac{d^4 f(x)}{dx^4} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^3 f(x)}{dx^3}\right).$$

$$\frac{d^5 f(x)}{dx^5} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^4 f(x)}{dx^4}\right).$$

Ejemplo. Calcular las siguientes derivadas de orden superior:

a. La segunda derivada de $f(x) = x^3 + 5x^2 + 7x - 1$

b. La tercera derivada de $g(x) = sen(x) + x^3 + 2$

c. La cuarta derivada de $h(x) = cos(x^2)$

Solución.

a. Para calcular la segunda derivada de f primero debemos calcular la primera derivada. Se tiene que

$$\frac{d(x^3 + 5x^2 + 7x - 1)}{dx} = 3x^2 + 10x + 7.$$

Luego

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{df(x^3 + 5x^2 + 7x - 1)}{dx}\right)$$
$$= \frac{d}{dx}(3x^2 + 10x + 7) = 6x + 10$$

b. Para el cálculo de esta derivada procedemos de la siguiente manera

$$\frac{d^3g(x)}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2g(x)}{dx^2}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{dg(x)}{dx}\right)\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{d(sen(x) + x^3 + 2)}{dx}\right)\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}(cos(x) + 3x^2)\right)$$

$$= \frac{d}{dx}(-sen(x) + 6x)$$

$$= -cos(x) + 6.$$

c. En este caso se tiene que

$$\frac{d^4h(x)}{dx^4} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^3h(x)}{dx^3}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2h(x)}{dx^2}\right)\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{dh(x)}{dx}\right)\right)\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{d\big(cos(x^2)\big)}{dx}\right)\right)\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{\mathrm{d}}{dx}\big(-2xsen(x^2)\big)\right)\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left(-2sen(x^2) - 4x^2cos(x^2)\right)\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(-4xcos(x^2) - 8xcos(x^2) + 8x^3sen(x^2)\right).$$

Simplificando:

$$-4xcos(x^2) - 8xcos(x^2) + 8x^3sen(x^2) = -12xcos(x^2) + 8x^3sen(x^2)$$

Por tanto:

$$\frac{d^4h(x)}{dx^4} = \frac{d}{dx}\left(-12xcos(x^2) + 8x^3sen(x^2)\right)$$

$$= -12cos(x^2) + 24x^2sen(x^2) + 24x^2sen(x^2) + 16x^4cos(x^2)$$

$$= -12cos(x^2) + 48x^2sen(x^2) + 16x^4cos(x^2)$$

3.7.2 Definición de máximo y mínimo

Dada una función f, se dice que x_0 es un máximo local en el intervalo I si se cumple que $f(x) \leq f(x_0)$ para todo x elemento de I. De igual manera, se dice que x_0 es un mínimo local en el intervalo I si se cumple que $f(x) \geq f(x_0)$ para todo x elemento de I.

Si x_0 es un máximo local en I, la gráfica de f tiene la siguiente forma en I

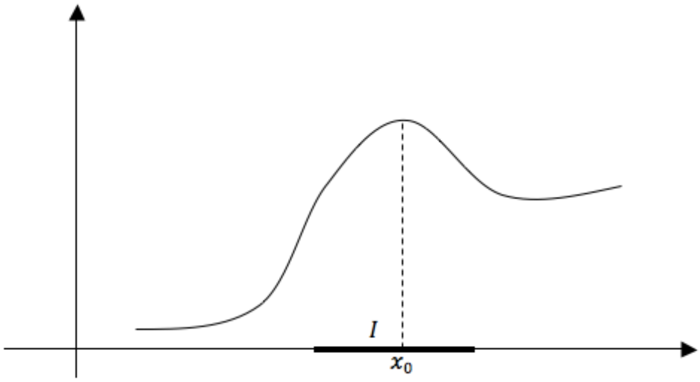


Figura 0.7. Gráfico de máximo local.

Si x_0 es un mínimo local en I, la gráfica de f tiene la siguiente forma en I

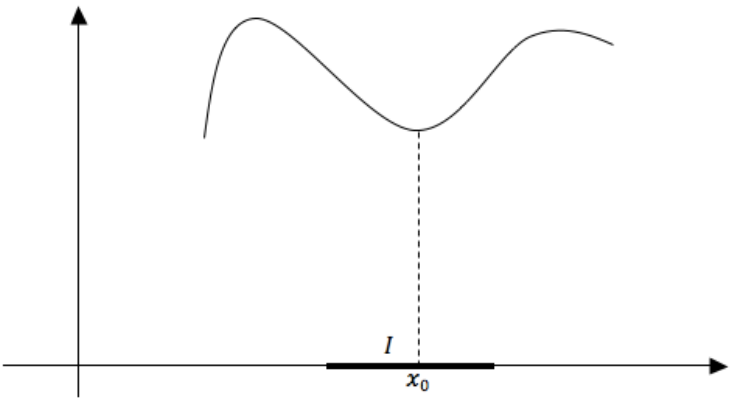


Figura 0.8. 8 Gráfico de mínimo local.

Nota. *Una función puede tener varios máximos y mínimos en su dominio.*

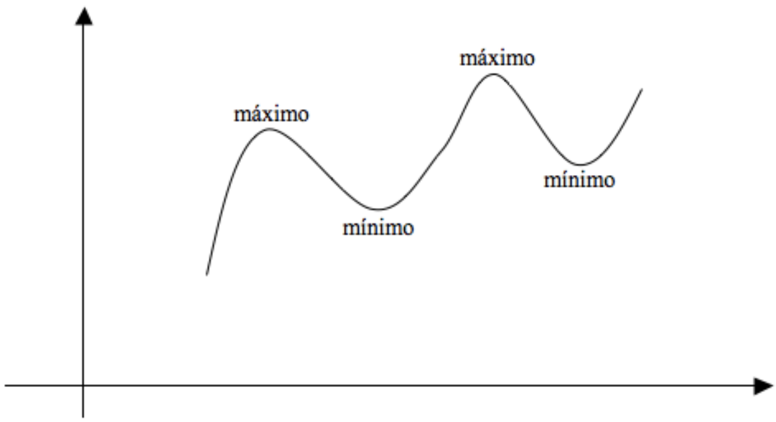


Figura 0.9. Gráfico de una función con varios máximos y mínimos.

3.7.3 Cálculo de máximos y mínimos

Como se menciono en la Sección 3.2, la derivada $f'(x_0)$ se la puede interpretar como la pendiente de la recta tangente a la curva gráfico de f en el punto $(x_0, f(x_0))$. Si esta pendiente fuera cero, la recta tangente sería horizontal con lo cual x_0 tendría que ser o bien un máximo o bien un mínimo.

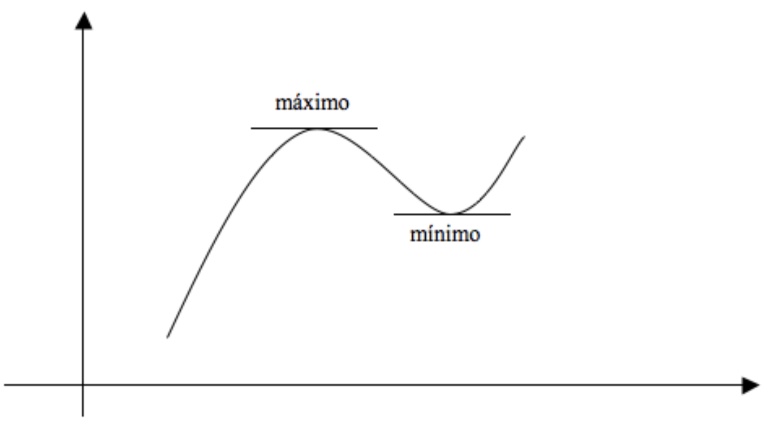


Figura 0.10. Gráfico de la recta tangente en los máximos y mínimos.

A partir de la figura 3.10 se puede intuir una forma analítica de calcular los posibles máximos y mínimos de una función. Primero necesitamos la siguiente definición.

Definición. *El valor x_0 se llama punto crítico de f cuando $f'(x_0) = 0$ o cuando $f'(x_0)$ no existe.*

Como se indico más arriba, si x_0 es un punto crítico de f, este podría ser un máximo o mínimo, en ocasiones esto no ocurre como muestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo. Sea $f(x) = x^3$. Se tiene que $f'(x) = 3x^2$ y por tanto $x_0 = 0$ es un punto crítico de f. Sin embargo, éste no es ni un máximo ni un mínimo de f como se puede observar en la figura siguiente.

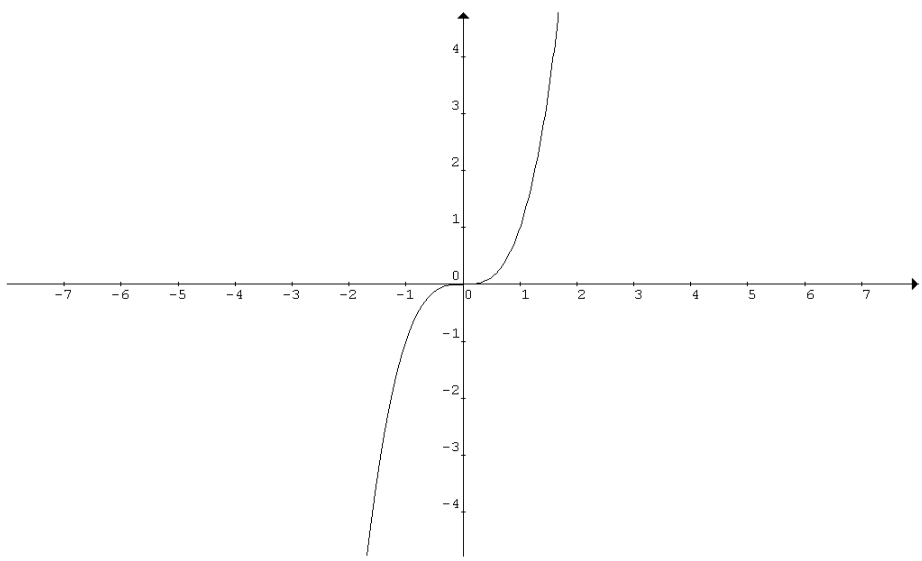


Figura 0.11. Gráfico de la función $\boldsymbol{f(x) = x^3}$.

Nota. *Calcular los puntos críticos de una función nos ayuda a hallar los posibles máximos y mínimos de una función pero, como se ve en el ejemplo anterior, esto no garantiza que dichos puntos críticos en verdad sean los máximos y mínimos que buscamos. En la siguiente sección se da un método para decidir si los puntos críticos de una función son máximos o mínimos.*

3.7.4 Criterio de la segunda derivada para máximos y mínimos

Existen al menos dos formas para averiguar si un punto crítico es un máximo o mínimo de la función f:

1. Estudiar el comportamiento de la función en puntos cercanos del punto crítico

2. Aplicar el criterio de la segunda derivada

La siguiente figura muestra como se tiene que estudiar el comportamiento de una función en punto crítico x_0

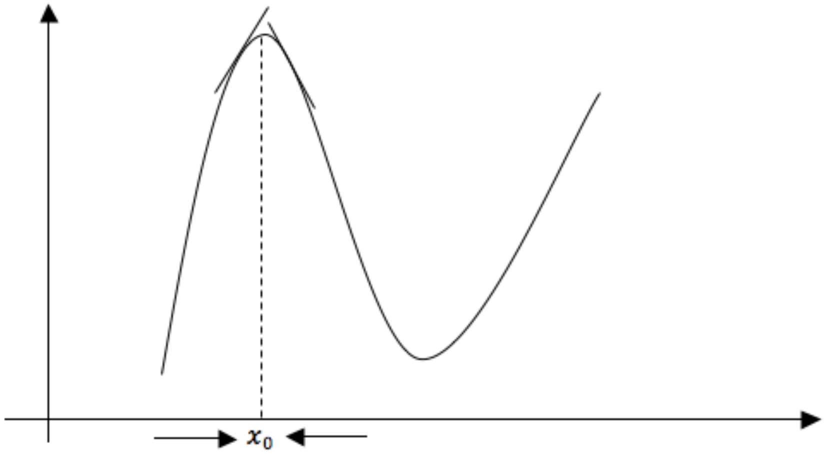


Figura 0.12. Comportamiento de una función en un punto crítico.

En la figura se puede observar que:

- si $x < x_0$, la pendiente de las rectas tangentes es positiva.
- si $x > x_0$, la pendiente de las rectas tangentes es negativa.

Se puede concluir que el punto crítico x_0 es un máximo si al acercarse a x_0 con valores menores a x_0 las pendientes son positivas y al acercarse a x_0 con valores mayores a x_0 las pendientes son negativas. Este hecho lo podemos esquematizar en la siguiente Tabla:

Tabla 3.2. Comportamiento de un máximo en puntos cercanos a $\boldsymbol{x_0}$

$x < x_0$	x_0	$x > x_0$
Pendientes positivas $+$	Pendiente cero 0	Pendientes negativas $-$

Fuente: autores

Nota: *En el caso de un mínimo se puede hacer un análisis igual, sus resultados se muestran en la siguiente tabla.*

Tabla 3.3. Comportamiento de un mínimo en puntos cerdanos a $\boldsymbol{x_0}$

$x < x_0$	x_0	$x > x_0$
Pendientes negativas $-$	Pendiente cero 0	Pendientes positivas $+$

Fuente: autores

Para averiguar si un punto crítico x_0 es un máximo o mínimo también se utiliza el siguiente criterio:

Si $f''(x_0) < 0$ entonces x_0 es un máximo

Si $f''(x)_0 > 0$ entonces x_0 es un mínimo

Si $f''(x_0) = 0$ entonces x_0 es un punto de inflexión

Nota. *En este criterio aparece la noción de punto de inflexión, éste se lo puede interpretar gráficamente como un punto en el cual la pendiente de la recta es cero, pero esta recta atraviesa la curva.*[11]

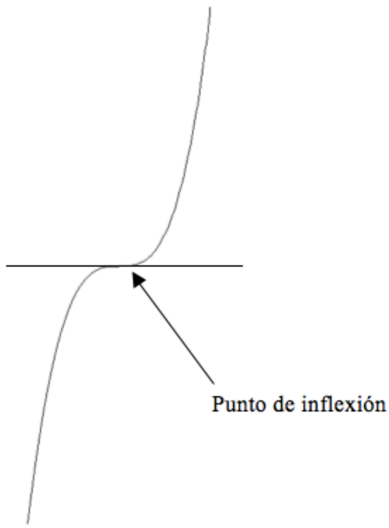


Figura 0.13. Punto de inflexión.

A la hora de calcular los máximos y mínimos de una función, el que decide el proceso es naturalmente, quien hace los cálculos. Sin embargo, de los dos criterios normalmente se prefiere el segundo por la facilidad que presentan sus cálculos.

Ejemplo. Calcular los máximos y mínimos (si existen) de la función definida por $f(x) = 3x^3 + 2x^2 - x + 1$.

[11] Los detalles técnicos de este criterio se los puede hallar en el análisis matemático de Lara, mencionado en la bibliografía de este capítulo.

Solución. Para hallar los posibles máximos y mínimos tenemos que calcular primero los puntos críticos. En este caso se tiene que:

$$f'(x) = (3x^3 + 2x^2 - x + 1)'$$
$$= 6x^2 + 4x - 1$$

Los puntos críticos serán aquellos números reales que anulan la derivada (en este caso la derivada existe para todo número real). Es decir, aquellos números reales para los cuales $f'(x) = 0$. Realizando los cálculos se tiene que $6x^2 + 4x - 1 = 0$ con lo cual $x_1 = 0.19371$ y $x_2 = -0.86038$.

La segunda derivada es $f''(x) = 12x + 4$. Aplicando el criterio de la segunda derivada se tiene que

$f''(0.19371) = -1.8615 \times 10^{-5} < 0$ $\qquad$ $x_1 = 0.19371$ es un máximo

$f''(-0.86038) = 2.4664 \times 10^{-6} > 0$ $\qquad$ $x_2 = -0.86038$ es un mínimo

3.8 Aplicaciones de la derivada. Segunda parte

3.8.1 Inventarios

Una importante aplicación del cálculo de máximos y mínimos se encuentra en el control de inventarios, donde a una compañía le in teresa la minimización de los costos de obtención y almacenamiento del inventario.

Además de los costos de producción de cada mercancía, una fábrica enfrenta otros dos costos, los cuales se llaman costos de preparación y costos de almacenamiento. El costo de preparación es el gasto de preparar una corrida de producción y el costo de almacenamiento es la cantidad en que se incurre cuando se almacenan las mercancías producidas hasta que se venden. Se hacen dos suposiciones:

1. La producción es instantánea, en cuyo caso el inventario se volverá cero antes de que haya una nueva corrida de producción.

2. No se admiten insuficiencias, lo cual evita que ocurra un inventario negativo.

Se supone que si existe una demanda uniforme cuando una corrida de producción consta de x unidades, el inventario promedio es de $\frac{1}{2}x$ unidades. Supóngase por ejemplo, que hay una demanda mensual uniforme de 600 unidades de una cierta mercancía. Podría haber una corrida de producción de 600 unidades al inicio del mes, y estas mercancías se almacenarían y venderían durante el mes, debido a la demanda uniforme, el inventario promedio del mes sería de 300 unidades. Si se efectúan dos corridas de producción (es decir, 300 unidades producidas al inicio del mes y otras 300 al cabo de 15 días), entonces el inventario mensual en promedio disminuiría hasta 150 unidades, y se produjeran 200 unidades cada 10 días, esto reduciría todavía más hasta llegar a 100 unidades. Cuando el número de corridas de producción aumenta, el inventario mensual en promedio disminuye, y así cuando el costo total de preparación crece, el costo total de almacenamiento decrece. Se desea minimizar la suma de estos dos costos.

Ejemplo. Una compañía tiene una demanda uniforme de 6000 mercancías al mes. El costo de preparación de cada corrida de producción es de $ 60 (dólares), y el costo de almacenamiento mensual de cada mercancía es de 50 centavos (de dólar). Si la producción es instantánea y no se admiten insuficiencias, ¿cuántas unidades deben producirse en cada corrida a fin de minimizar el costo total de la obtención y almacenamiento del inventario?.

Solución. Sea x el número de mercancías producidas en cada corrida de producción; $0 < x \leq 6000$. Sea $C(x)$ el costo total mensual de obtención y almacenamiento del inventario.

Como se van a producir 600 unidades al mes, el número de corridas de producción por mes es de $\frac{\boldsymbol{6000}}{\boldsymbol{x}}$. El costo de preparación de cada corrida es de $ 60 y en consecuencia, el costo total de preparación es:

$$60\left(\frac{6000}{x}\right)$$

Ya que se supone una demanda uniforme y como la producción es instantánea, el número promedio de artículos en inventario es $\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{2}}$. El costo mensual de almacenamiento es de 50 centavos por unidad y, por lo tanto, el costo total de almacenamiento es $\frac{1}{2}\frac{x}{2}$. En consecuencia se tiene que:

$$C(x) = 60\left(\frac{6000}{x}\right) + \frac{1}{2}\frac{x}{2}$$

Lo que tenemos que hacer es averiguar cuál es el valor de x que minimice C. Al calcular la derivada de C e igualarla a cero se tiene que:

$$C'(x) = -\frac{360000}{x^2} + \frac{1}{4} = 0$$

Con lo cual se tiene que $x = 1200$. Al realizar la prueba de la segunda derivada se concluye que este es un punto mínimo de $\boldsymbol{C}$, es decir, se deben producir 1200 unidades para minimizar el costo total de obtención y almacenamiento del inventario.

3.8.2 Problemas de optimización

Muchos problemas prácticos están relacionados con ciertas propiedades de máximos y mínimos; por ejemplo, maximizar la producción de café, minimizar el tiempo de transporte desde una empacadora de camarón hasta el aeropuerto. Los problemas de esta clase se denominan problemas de optimización.

Ejemplo. En una plantación de aguacates hay 40 árboles por hectárea y el rendimiento promedio es de 900 aguacates por árbol. Por cada árbol adicional plantado por hectárea, el rendimiento promedio por árbol se reduce aproximadamente en 10 aguacates. ¿Cuántos árboles por hectárea darán la mayor cosecha de aguacates?

Solución. El objetivo es hallar el número de árboles que den una cosecha máxima. Considérense los siguientes parámetros:

- C cantidad cosechada
- x número de árboles adicionales

- $40 + x$ número de árboles después del incremento

- $900 - 10x$ producción por árbol después del incremento

Por tanto, la cosecha es:

$$\begin{aligned} C(x) &= (40 + x\ )(900 - 10x) \\ &= 36000 - 400x + 900x - 10x^2 \\ &= 36000 + 500x - 10x^2 \end{aligned}$$

Por tanto, $C'(x) = 500 - 20x$. Esta derivada se anula para $x = 25$, es decir, $x = 25$ es el único punto crítico. Veamos si este es un máximo o mínimo.

$C''(x) = -20$, si reemplazamos este punto crítico en la segunda derivada el resultado será -20 por tanto, este es un máximo. Concluimos que el número óptimo de árboles a plantar es $40 + 25 = 65$ árboles por hectárea.

3.8.3 Aplicaciones a la economía

Los métodos del cálculo que generalmente se emplean en el mundo de los negocios son para maximizar los beneficios o planificar una expansión. La idea general es la siguiente:

Los economistas definen la función de costo $C(q)$ como el costo de producir una cantidad q de algún producto. La función de renta $R(q)$ mide el ingreso que se obtiene luego de vender una cantidad q.

Si $p(q)$ es el precio unitario cuando se vende q unidades, entonces

$$R(q) = p(q) \times q$$

Si $p(q)$ es constante, $R(q)$ es una línea recta. En muchos casos, sin embargo, $p(q)$ decrece cuando q crece (a mayor unidades vendidas, el precio unitario es menor).

La función de beneficio o utilidad se define como

$$\pi(q) = R(q) - C(q)$$

El cálculo se puede utilizar para saber las cantidades del producto que maximizan el beneficio. Para un máximo se debe tener $\pi'(q) = 0$. Esto ocurre cuando $R'(q) = C'(q)$.

Nota. *Como se mencionó en el parágrafo 3.6.1* $C'(q)$ *es el costo marginal, es decir, el incremento en el costo cuando se produce una unidad adicional, cuando el nivel actual de producción es de* q *unidades. Análogamente la renta marginal* $R'(q)$ *da el incremento del ingreso cuando se vende una unidad adicional, si el nivel de ventas es* q.

Por tanto, para que exista un beneficio máximo el nivel de producción debe ser tal que el costo marginal iguale a la renta marginal.

La función de costo promedio se define como:

$$P(q) = \frac{C(q)}{q}$$

Para que el costo promedio sea mínimo se debe tener que $P'(q) = 0$. Aplicando las reglas de derivación se tiene que:

$$P'(q) = \frac{qC'(q) - C(q)}{q^2}$$

Si el costo promedio es mínimo, se cumple:

$$qC'(q) = C(q)$$
$$C'(q) = \frac{C(q)}{q} = P(q)$$

Así, para un costo promedio mínimo, el costo marginal debe ser igual al costo promedio.

Ejemplo. Supongamos que un gerente de una línea aérea desea investigar si es posible introducir un vuelo adicional en una ruta comercial. Para ello averigua primero que los costos totales de operación son $C(q) = 50000 + 10000q + 5q^2$ donde la constante 50000 representa los costos fijos, el término lineal $10000q$ es el costo primario por vuelo, el término cuadrático $5q^2$ es el costo adicional incurrido por la complejidad de la operación. Además, la rentabilidad está dada por $R(q) = 20000q - 1000$. El propósito es maximizar el beneficio.

Solución. Puesto que la función de beneficio está dada por

$$\pi(q) = R(q) - C(q).$$

Este será máximo si $\pi'(q) = 0$.

Relizando los calculos se tiene que:

$$\pi'(q) = R'(q) - C'(q)$$
$$= 10000 + 10q - 20000.$$

Por tanto:

$$10000 + 10q - 20000 = 0.$$

Es decir $q = 1000$, esto es, el beneficio será máximo si se venden 1000 boletos.

Ejercicios del capítulo 3

1. Supóngase que $C(x)$ dólares es el costo total de producción de un artículo. Si el costo está dado por $C(x) = 2x^2 + x + 8$. Hallar la función que da:

   - El costo promedio
   - El costo marginal

2. El costo total de producción de x unidades de un cierto artículo está dado por la función $C(x) = 20 + 5x + 2\sqrt{x}$. Encuentre:

   - El costo promedio cuando $x = 25$
   - El costo marginal cuando $x = 25$

- La elasticidad de costo cuando $x = 25$

3. El ingreso total de la venta de x libreros esta dado por

$$R(x) = 150x - \frac{x^2}{4}$$

Determine:

- La función de ingreso marginal
- El ingreso marginal cuando $x = 20$
- El ingreso real obtenido de la venta del librero número 21

4. En una fábrica productora de champiñones, el producto se empaca en cajas que llevan una etiqueta en la que se destaca las cualidades del producto. Se necesita gastar la menor cantidad de papel en la elaboración de las etiquetas, las cuales han de contener 50 cm^2 de texto con un margen de 4 cm arriba y abajo y de 2 cm a los lados. Hallar las dimensiones de la hoja de papel de manera que el área sea mínima.

Bibliografía

1. Haeussler, E., & Paul, R. (2003). *Matemáticas para administración y economía* (10ª ed.). México: Pearson.

2. Lial, M., & Hungerford T. (2000), *Matemáticas para administración y economía* (7ª ed.). México: Pearson.

3. Arya, J., & Lardner, R. (2002). *Matemáticas aplicadas a la administración y economía* (4ª ed.). México: Pearson.

4. Andrade, V. M. (s.f). *Matemáticas II*. Escuela Politécnica del Ejercito. Quito, Ecuador.

5. Aguayo, G. (sf) *Cálculo Diferencial e Integral*. Escuela Superior Politécnica de Chimborazo. Riobamba, Ecuador.

6. Lara, J., & Arrova, J. (2017). *Anális Matemático* (2ª ed.). Universidad Centarl del Ecuador. Quito, Ecuador.

7. Pérez, C. A., Reyes, P. J. A., & García, A. F. (2013). *Fundamentos de matemática aplicada*. Retrieved from https://ebookcentral.proquest.com.

8. Curo, A. (2015). *Matemática básica para administradores*. Retrieved from https://ebookcentral.proquest.com.

9. Martínez, D. L. R. F. (2010). *Matemática, economía y scientific workplace*. Retrieved from https://ebookcentral.proquest.com.

10. Jaimes, G. N. M. (2005). *Matemática i: negocios internacionales (10a. ed.)*. Retrieved from https://ebookcentral.proquest.com.

11. Ramírez, V. A. P., & Cárdenas, A. J. C. (2001). *Matemática universitaria: conceptos y aplicaciones en ingeniería*. Retrieved from https://ebookcentral.proquest.com.

12. Ortiz, C. F. J. (2014). *Cálculo diferencial*. Retrieved from https://ebookcentral.proquest.com.

13. Camacho, A. (2008). *Cálculo diferencial*. Retrieved from https://ebookcentral.proquest.com.

14. Conamat (2016). *Cálculo diferencial (4a. ed.)*. Retrieved from https://ebookcentral.proquest.com

El texto ha sido diseñado de tal forma que los lectores tengan primero una panorámica general de los temas tratados. Se ha dejado a un lado la demostración de los resultados matemáticos a favor de una comprensión más adecuada de las aplicaciones administrativas y económicas de la matemática básica. Se han realizado ejemplos detallados para un entendimiento adecuado de los procesos que están involucrados en la resolución de cada tipo de ejercicio.

La obra ha sido desarrollada en tres capítulos, cada uno de los cuales comienza con una visión general de los temas tratados en el transcurso de éste. En el capítulo 1 se estudia la teoría de funciones y sus aplicaciones en el ámbito administrativo. El capítulo 2 estudia la teoría de límites de funciones reales, el objetico de este capítulo es dar el sustento necesario al cálculo diferencial. El capítulo 3 está dedicado al estudio del cálculo diferencial y sus aplicaciones a la administración y economía.

Se piensa tratar temas referentes al cálculo integral y a las ecuaciones diferenciales ordinarias en un segundo tomo.

Leonidas Cerda Romero. Profesional con más de 20 años de experiencia en docencia, doctor en Matemáticas por la Universidad de Concepción, Chile. En la actualidad su área de investigación es la teoría de números y su relación con la lógica matemática.

Janneth Morocho Yaucán. Profesional con más de 20 años de experiencia en docencia, con una maestría en Estadística Aplicada de la Universidad de Granada, España. En la actualidad su investigación está encaminada en cuantificar el impacto de la implementación de nuevas metodologías de enseñanza-aprendizaje.

ISBN: 978-9942-35-641-3